大学数学の入門⑧

集合と位相

斎藤 毅――[著]

東京大学出版会

大学数学の入門⑧

集合と位相

斎藤 毅――［著］

東京大学出版会

Set Theory and General Topology
(Introductory Texts for Undergraduate Mathematics 8)
Takeshi SAITO
University of Tokyo Press, 2009
ISBN978-4-13-062958-4

はじめに

集合と位相は，現代数学の土台である．集合や位相なしに，その本質的な部分を語ることはできない．数学の対象は，すべて集合としてとらえることができるというのが，現代の数学の立場である．位相空間は，空間とは何かという問いに対する，解答の1つである．

群，環や体などの代数学の基本的対象は，ある種の条件をみたす演算が定められた集合であり，幾何学の舞台である多様体は，各点のまわりで座標が定義された位相空間である．解析学でも，積分や確率論の基礎となる測度論は，集合論なしに定式化できないし，無限次元のさまざまな関数空間は，その空間の位相を考えることではじめて扱えるようになる．

集合と位相は，このように，数学の基礎をなしているが，適用範囲が広いだけに，高度に抽象的な対象である．また，集合と位相は，数学的にものをとらえ，考えを表わすための，現代数学の共通言語としての役割を果たしている．

数学を専攻して学習しはじめた学生を主な読者として想定し，集合や位相について，基礎的な部分を解説する．集合と位相という現代数学の共通言語を獲得し，数学のほかの分野の学習をはじめられるようになることが目標である．そのほか，実数論や関数の連続性などの，微積分の基礎となる部分についても，簡単に解説する．

そのような読者は，数学独特の考え方や習慣，あるいは数学特有のいいまわしなどになじみが薄いかもしれない．そこでこうした点について，話の筋道からは逸れるかもしれないが知っていると役に立ちそうなことなどを，随所に**よりみち**としてつけ加えてある．

20世紀後半に発展した圏論的考え方にしたがい，集合や位相空間それ自体と同じく，それらの間の写像や連続写像を重視する観点をとる．また，巾集合，逆像や積位相などの基本的な構成を，積極的に利用する方法をとる．これは，このような抽象的で汎用性の高い方法に早い機会になじんでおくためでもあるし，いろいろな視点から考えるためでもある．このため，証明などで，ほかの教科書でよくみるものとは違うようにみえるものがあるかもしれ

ない．

扱う内容は，さらに進んで数学のいろいろな分野を学習するために必要な，基本的なことがらに絞ってある．そのため，巻末（「参考書」）で列挙するような発展的な項目は，集合と位相について固有の重要な主題ではあるが，あえてとりあげない．集合については，公理的集合論をある程度は考慮するが，それに基づく厳密な展開はとらない．形式論理についても，論理記号の導入程度にとどめる．こうした点について不満な読者は，巻末にあげた文献などで補われることをおすすめする．

数学の理解を深めるには，抽象的な理論を追うだけでは不十分であり，具体的な対象を通じて，数学的な感覚を養うことが欠かせない．そこで，数学でよくでてくる基本的な例を多数紹介し，それらを使った演習問題もなるべく多くとりあげる．たとえば，代数学の基本定理を，リーマン球面のコンパクト性の応用として証明する．

はじめの 4 章で，集合，写像，位相という基本的な対象について，用語を定義し，重要なことがらだけを解説する．第 1 章，第 2 章，第 4 章で，それぞれ集合，写像，位相について，基本的な定義や構成を解説する．第 4 章で扱う位相は，抽象的な定義だけでは感覚がつかみにくいと思われるので，$\mathbb{R}^n$ の位相を先に第 3 章で導入する．

つづく 2 章では，位相空間について，もう少しくわしい内容を解説する．第 5 章では，距離位相，積位相，商位相などのさまざまな位相を構成する．第 6 章では，コンパクト性などの基本的な性質を扱う．

最後の 2 章では，集合と距離空間について，もっと進んだ内容を扱う．第 7 章では，無限集合の元の個数にあたる濃度について解説する．第 8 章では，点列の収束や可算濃度の概念を使って，距離空間のくわしい性質を調べる．その応用として，陰関数定理や，常微分方程式の解の存在定理も証明する．

この本のもととなったのは，2008 年度に東京大学理学部数学科で行った 2 年生向け講義「集合と位相」用に作成した教材である．質問等を通して原稿の改良に寄与してくれた学生諸君，助言を数多くいただいた同僚の松尾　厚氏，いろいろと相談にものっていただいた東京大学出版会の丹内利香さんに感謝する．

2009 年 1 月 22 日　斎藤　毅

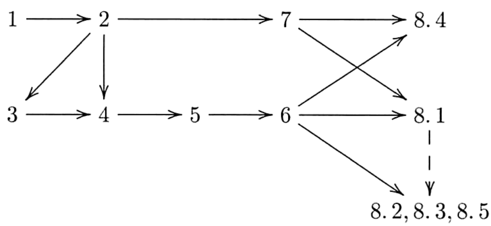
目次

この本の使い方

予備知識など　第 1 章と第 2 章では，論理的かつ抽象的な思考力以上のものをとくに必要としない．2.9 節と 3.1 節で，数の体系を構成するが，詳細は省略した．第 3 章のはじめで，実数を切断として定義するが，実数を常識的に理解していれば，それに加えて実数の連続性を公理と考えて読み進めれば十分である．多変数関数については，その連続性の定義などは第 3 章に書いてあるが，ある程度慣れていることが望ましい．

第 4 章以降では，第 3 章までの内容を理解していることを前提とする．定理や命題の証明は，かなりくわしく書いたが，それでも省略している部分もある．そのようなところは鵜呑みにせず，自分で細部を確認することをすすめる．

各章のつながり　各章の論理的なつながりは，だいたい下の図のようになっている．たとえば，濃度を学ぶには，第 3 章から第 6 章までの位相に関する部分をとばして，第 2 章から直接第 7 章に進むことができる．標題に $*$ のついている節では，少し進んだ話題を扱う．あとまわしにしても，先を読めるようになっている．



また，8.4 節の内容は，第 8 章のほかの節の内容と独立である．8.1 節の内容は，チコノフの定理以外は第 8 章のほかの節で使わない．

まとめと演習問題　各節の最後には，簡単なまとめと問題がある．問題は，A, B, C の 3 段階にわかれている．A は，定義や命題などの理解を確認するための問題である．B は，それよりは難しいが，やはり基本的な問題である．C は，進んだ話題と関係していたり，よく考えないと解けないような問題である．AP のように，P がついている問題は，本文中で命題として扱ってもよかったような内容を，問題としたものである．

集合と位相に限らず，数学の理論は，一般の対象について定式化され証明されるのがふつうである．これを，いろいろな対象に適用してみることで，命題の意味が理解できるようになる．また，命題の仮定をみたさない対象による反例を調べることで，その証明もよく理解できることがある．このように，抽象的な理論を理解するには，演習問題などで，数学的な感覚を磨くことが欠かせない．

巻末に，問題の略解がある．問題の答がわかったと思ったら，その解答を，細部まで正確に書いてみることをすすめる．書くことで考えを整理し，正確に表現するためには，それなりの訓練がいる．またそうすることで，理解が確かめられるし，別の解き方がみつかることもある．明らかだと思ったところのほうがかえって思い違いはあるもので，専門の論文でも稀にみられる誤りは，簡単だから省略すると書かれているところにみつかるものである．そうならないようにするには，証明を細部まで正確に書く習慣をつけることが，いちばんの近道である．

用語　用語は，なるべく慣用のものにしたがった．しかし，定着した用語がなかったり，文献によって意味が違ったりする場合には，必ずしもそうといえないものもある．ほかの本などと比べたときに，誤解を招くおそれもあるので，それらを以下にあげておく．

- 自然数：0 も自然数である．$n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ という集合論的な定義を意識している数学者はむしろ少ないかもしれない．
- 写像の行き先：写像の終集合とよばれることもある．
- 可逆写像：誤解の余地はないが，全単射とよばれることが多い．
- 値写像：評価写像と書かれていることもある．
- 無縁和：集合の直和とよばれることもある．
- 分割：分割の各成分は空集合でないとしたが，そうでない本もある．
- 商写像：商集合への標準全射のことを表わす．商集合を商空間と考える場合に限って使う本もある．等化写像と書かれていることもある．射影とよぶこともある．
- 切断：左切片だけで切断とよぶことにしたが，左切片と右切片の対を切断とよぶのがふつうである．
- うめこみ：部分空間への同相写像のことである．もう少し弱い条件をみ

たす写像を表わすこともある．

・レトラクション，セクション：これらは連続であるとしたが，そうでないこともある．
・同値な距離：一様同値な距離だけを同値な距離とよぶこともある．
・連結：空集合は連結でないことにしたが，空集合は連結であるとすることが多い．
・ハウスドルフ空間：分離空間とよばれることもある．
・コンパクト空間：準コンパクト空間とよばれることもある．その場合には，さらにハウスドルフであるときに限ってコンパクト空間とよばれる．
・可算，可算無限：それぞれ，たかだか可算，可算とよぶことも多い．
・第一（第二）可算：第一（第二）可算公理をみたすということが多い．

第1章 集合

現代の数学で，集合の概念は，写像とともに，数学の対象を確定し，構成し，操作するための厳密なことばとして，欠かせない役割を果たしている．この章ではまず，集合について，基本的なことがらを扱う．集合族や商集合などの，写像と結びついた内容は次章で扱う．

1.1 節では，集合の元や部分集合について，用語と記号を準備する．数学的な文の正確な記述に使われる論理記号についても，簡単に解説する．1.2 節では，集合の元についての条件を指定することで定まる部分集合について，記号と用語を定める．

1.3 節では，集合の構成法を解説する．集合が 1 つあれば，その部分集合全体のなす集合として，その巾集合が定義される．集合が複数あれば，それらの合併と共通部分および積集合がつくられる．集合族を含んだ，もっと一般的な構成は，次章で扱う．

1 つの集合の元の間の関係は，その集合とそれ自身の積集合の部分集合として表わされる．1.4 節では，同値関係と順序をとりあげて，用語を定める．

1.1 集合の元と部分集合，論理記号

集合の元や包含関係についての記号や用語の準備からはじめる．この本では，集合の定義はしない．そのあたりのことについては，この節の終わりでふれる．

$x \in X$ という記号で，x が**集合** (set) X の**元**（げん） (element) であることを表わす．$X \ni x$ と書くこともある．x が X の元であることを，x が X に**属する** (belong) ともいう．x が X に含まれるということもあるが，部分集合として含まれる (included) ということばとまぎらわしいので，必要なときは，x が

X に元として**含まれる** (contained) ということにして，区別する．X を空間的なものと考えているときには，X の元を**点** (point) とよぶ．$x \in X$ でないことを $x \notin X$ という記号で表わす．

よりみち 1　古くは，個々の数や関数あるいは図形が，数学の対象と考えられていた．19 世紀ごろから，いろいろな数の体系や，さまざまな空間などを設定し，それらを研究の対象として認識するようになった．集合や写像の用語は，それらを記述し操作するために，最も適したことばとして広く使われるようになった．

集合論的な見方では，たとえば，平面は，平面上の点全体の集合としてとらえられる．ここには，物質はすべて原子からなるという考え方に近いものがある．さらに，平面上の点はその点の座標という実数の対のことであると考えることにより，平面は実数全体の集合の積集合として定義される．

20 世紀には，数学の対象を同じ種類のほかの対象との関わりのなかでとらえる圏論的な視点や，違う種類の対象に対応させる関手の考えの重要性も認識されるようになった．これらも，集合論のわくの中で，厳密に記述することができる．

$x \in X$ のように，集合は大文字で，その元は小文字で表わす習慣がある．しかし，厳密にいうと集合論では集合の元もすべて集合であるし，そこまでいわなくても，巾集合のように集合を元とする集合を考えることはだいじなので，このような区別を一貫させることはできない．それでも，その習慣にできる限りしたがったほうが，わかりやすいことも確かである．

よりみち 2　1 つ 1 つの集合を点としてとらえ，それらを元とする集合として対象を構成する方法は，現代数学の基本的な方法である．次章で定義する商集合や，第 3 章で解説する実数の切断としての定義は，その典型的な例である．

X と Y を集合とする．任意の x に対し，$x \in X$ ならば $x \in Y$ である，ということを，$X \subset Y$ という記号で表わし，X は Y の**部分集合** (subset) であるという．$Y \supset X$ という記号を使い，Y は X を部分集合として含むという

こともある．X それ自体は，X の部分集合である．集合 X, Y, Z が，$X \subset Y$ と $Y \subset Z$ をみたすならば，X の任意の元は Y の元でありしたがって Z の元でもあるから，$X \subset Z$ である．

$X = Y$ とは，$X \subset Y$ かつ $X \supset Y$ であるということである．$X = Y$ であるとき，X と Y が**等しい** (equal) という．$X = Y$ でないことを，$X \neq Y$ で表わす．$X \subset Y$ かつ $X \neq Y$ であるとき，X は Y の**真部分集合** (proper subset) であるといい，$X \subsetneqq Y$ という記号で表わす．$X \subset Y$ でないことは，$X \not\subset Y$ という記号で表わす．

よりみち 3　$X = Y$ とは，$X \subset Y$ かつ $X \supset Y$ のことである．これは，$X = Y$ とは，任意の x に対し条件 $x \in X$ と $x \in Y$ が同値ということである．このことは，集合が等しいとは，その元がぴったり一致することであるということを表わしている．この性質がなりたつので，集合とはものの集まりのことであるといわれる．

集合 X と Y が等しいことを示したいときは，任意の $x \in X$ について $x \in Y$ を示し，さらに任意の $x \in Y$ について $x \in X$ を示すのが，よくある方法である．

数学では，等号を示すときに，まず何としての等号かをはっきりさせるのが大切である．$x = y$ を示そうとしているなら，まず，x と y が同じ集合の元であることを確認するのがよい．

よりみち 4　包含関係 $X \subset Y$ と $X \subsetneqq Y$ を，それぞれ $X \subseteqq Y$ と $X \subset Y$ で表わす流儀もある．数の不等式との類推からいえばそうかもしれないが，$X \subset Y$ のほうが $X \subsetneqq Y$ よりも基本的であり使われる頻度も高いので，ここでの用法がふつうである．

こみいった内容をふつうのことばで表わそうとすると，あいまいな言い方になりがちである．これを避けるには，**論理記号** (logical symbol) を使えばよい．P や Q が，x についての条件を表わしているとき，「P ならば Q である」という x についての条件を，$\Rightarrow$ という記号を使って，$P \Rightarrow Q$ のように表わす．記号 $\Rightarrow$ を**含意** (implication) とよぶ．また，「任意の x について P がなりたつ」というふつうの文を，$\forall$ という記号を使って $\forall x P$ のように表わ

す．記号 $\forall$ は**全称記号** (universal quantifier) とよぶ．これらの記号を使えば，「X が Y の部分集合である」というふつうの文は，$\forall x((x \in X) \Rightarrow (x \in Y))$ と表わせる．

よりみち 5　記号論理では，記号 $P \to Q$ は「P ならば Q」を表わし，記号 $P \Rightarrow Q$ は「P ならば Q は恒真式」あるいは「任意の x に対し P ならば Q」を表わすというように使いわけているらしい．数学では記号 $\to$ は写像を表わし，記号 $\Rightarrow$ を論理記号に使うのがふつうのようである．この本では，数学での習慣にしたがう．

$P \Rightarrow Q$ を示すには，P がなりたつことを仮定して，Q を証明するのがふつうの方法である．P を $P \Rightarrow Q$ の**仮定** (assumption)，Q を**結論** (conclusion) とよぶ．$P \Rightarrow Q$ の**逆** (converse) は $Q \Rightarrow P$ で表わせる．$P \Rightarrow Q$ がなりたつからといって，その逆 $Q \Rightarrow P$ がなりたつとは限らない．$\forall x(P \Rightarrow Q)$ と $(\forall x P) \Rightarrow Q$ は意味が違うので，任意の x に対し P ならば Q であると書いてあるときには，どちらの意味か注意して判定しなくてはいけない．P と Q の両方に x が現れていれば，たいていは $\forall x(P \Rightarrow Q)$ である．たとえば上のように，$\forall x((x \in X) \Rightarrow (x \in Y))$ は $X \subset Y$ という意味だが，$(\forall x\ x \in X) \Rightarrow x \in Y$ については，問題 1.2.4 にあるように，仮定 $\forall x\ x \in X$ がなりたたないから，$(\forall x\ x \in X) \Rightarrow x \in Y$ は任意の集合 X と Y についてなりたつことになる．

よりみち 6　「P ならば Q」というときに，P でないときに Q がどうなるかには，ふつうのことばではあいまいさがある．たとえば，「今日なら半額」という広告が次の日にそのままでも，一概に詐欺といえないのは，当日以外のねだんがいつもどおりなのかそれともそうはいっていないのか，どちらとも解釈できるところに原因がある．数学では，P がなりたたないなら，Q がなりたってもなりたたなくても，「P ならば Q」は正しい文である．

似たようなことで，「P または Q」というときは，ふつうのことばでは P と Q の両方ではないという意味を含むことがある．数学では，P と Q の少なくとも一方がなりたつという意味である．

論理記号には，$\Rightarrow, \forall$ のほかに，$\neg, \wedge, \vee, \exists$ がある．これらはそれぞれ，**否定**

(negation)，**論理積** (logical product, disjunction)，**論理和** (logical sum, conjunction)，**存在記号** (existential quantifier) とよぶ．$\neg P$ は，ふつうのことばでは，「P でない」という文を表わす．$P \wedge Q$ と $P \vee Q$ は，それぞれ，「P かつ Q である」，「P または Q である」という文を表わす．また $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ を，$P \Leftrightarrow Q$ と略記する．これは，条件 P が条件 Q と**同値** (equivalent) であることを表わしている．$P \Rightarrow Q$ の**対偶** (contraposition) $\neg Q \Rightarrow \neg P$ は，$P \Rightarrow Q$ と同値である．$\exists x P$ は，「P をみたす x が存在する」という文を表わす．$\forall, \exists$ は**量化記号** (quantifier) とよばれる．これらの記号の性質については，次節でまた解説する．

よりみち 7　コンマ「，」は，「または」を表わしていることも「かつ」を表わしていることもある．たとえば，「方程式 $x^2 + y^2 = 2, x = y$ の解は $(x, y) = (1, 1), (-1, -1)$ である」というとき，1 つめのコンマは「かつ」であり，2 つめのコンマは「または」である．これは，たいがい文脈で区別することができる．

「P かつ Q または R」と書いてあるときに，$(P \wedge Q) \vee R$ と $P \wedge (Q \vee R)$ のどちらであるかは，文脈から決めることはできないので，このような表現は避けなければいけない．

論理記号を使った式を正しく書くためには，かっこがたくさん要ることが多い．それを避けるために，かけ算はたし算に優先するという規則を定めて $(ax)+(by)$ を $ax+by$ と書くように，論理記号の優先順位を定めておく．$\neg$ は，$\wedge$ や $\vee, \Rightarrow$ に優先する．$x \in X$ や $Y \subset X$ は，$\neg$ や $\wedge, \vee, \Rightarrow$ に優先する，というようにである．このように定めれば，たとえば，$((\neg(x \in X)) \wedge (Y \subset X)) \Rightarrow (\neg(x \in Y))$ という式を，$(\neg x \in X \wedge Y \subset X) \Rightarrow \neg x \in Y$ のように書くことができる．これは，x が X の元でなく Y が X の部分集合であるならば，x は Y の元でない，という任意の x について正しい文を表わしている．このように，ふつうの文の内容を，論理記号と集合の記号だけを使って表わすことを，**形式化** (formalize) するという．

公理的集合論では，論理記号と集合の記号の列で，述語論理の構文の規則にしたがって書かれたものを，**論理式** (formula) とよぶ．論理式のうちで，集合論の公理から，述語論理の推論の規則にしたがって証明されるものを，集

合論の**定理** (theorem) とよぶ．述語論理とは，量化記号を使った形式論理のことをいう．この本では述語論理については説明しない．

よりみち 8　定理を，場合によって，補題，命題，定理，系などとよびわけている．ふつう，定理のうちでとくに重要なものだけを定理とよび，それほどでもないものを**命題** (proposition) とよぶ．命題ということばには，この意味のほかに，**真** (true) か**偽** (false) かのどちらかが定まる文という意味もあり，まぎらわしい．**補題** (lemma) とは，ほかの命題や定理の証明の準備となる定理であり，**系** (corollary) とは，ほかの命題や定理から簡単に導かれる定理である．補題のうちでとくに有名なのが，7.3 節ででてくるツォルンの補題である．これは，重要な定理であるが，なぜか，補題とよばれている．

公理 (axiom) とは，理論の出発点として設定する命題のことである．現代では，自明の真理という意味はない．

この本では，公理的集合論にならって，集合とは，形式論理とこの節で定めた記号 $\in$ や $\subset$ についての規則にしたがうものであって，次の節以降で記述する構成法によって，構成されるものであると考える．しかし，集合の厳密な定義を解説するには，そのための準備がこの本の目的をこえる水準になってしまうので，集合の定義には，立ち入らないことにする．

公理的集合論では，集合の元として考えられるものは集合だけである．そこでは，空集合を出発点とし，順々に集合を構成することで，数学の世界をつくっていく．集合論の公理系とは，ひとことでいえば，集合の構成法として許容されるものを書き並べたものである．公理的集合論で，構成法の記述が重要である理由は，その辺を雑に考えると，ラッセルの背理（問題 1.2.4.2.）のように，理論が破綻してしまうからである．

この本では，集合の定義には立ち入らず，集合にはどのようなものがあり，どういう操作ができるかだけを解説する．形式的な理論における無定義概念は，結局のところ，そのようにしかとらえようのないものである．

まとめ
・集合の元，部分集合などを表わす記号を定義した．
・論理記号を使った形式的な式によって，集合について正確な記述ができる．

問題

A 1.1.1　次の文を形式化し，x, y, X, Y などの文字と論理記号と $=, \in, \neq, \notin$ とかっこ $(,)$ だけを使って表わせ．また，その解答が正しいことを説明せよ．

1. X の元がただ 1 つ存在する．
2. $X = Y$ ならば，X の任意の元は Y の元である．
3. 2 個以上の元を含む集合は存在しない．

1.2　元についての条件と部分集合

前節にひきつづいて，集合の部分集合についての記号と用語を定める．集合 X の元についての条件を指定すると，その条件をみたす元全体のなす X の部分集合が定まる．このことを使って，X の部分集合についての演算を定める．また，X の部分集合と，対応する条件についての論理法則のかかわりを調べる．

数学では，集合 X を 1 つ指定し，X の部分集合や元だけを主に考えるということがよくある．このようなとき，X を**全体集合** (universal set) とよぶ．X を全体集合と考えているとき，X の元の性質 P に対し，$\forall x(x \in X \Rightarrow P)$ を $\forall x \in X\ P$ と略記する．これは，X のすべての元 x について P がなりたつということを表わしている．$\exists x(x \in X \wedge P)$ を $\exists x \in X\ P$ と略記する．これは，X の元 x で，P がなりたつものが存在するということを表わしている．

よりみち 9　X のすべての元に対し，P がなりたつということは，任意の x に対し，$x \in X$ ならば P ということである．X の元で，P をみたすものがあるということは，$x \in X$ かつ P をみたす x が存在するということである．この差が，$\forall x \in X\ P$ と $\exists x \in X\ P$ という略記法の違いに反映している．

1 つの対象 X を指定し，それ以降，その X について考えるとき，X を固

定するということがよくある．固定ということばは，fix の訳語である．集合 X の任意の元 x を考えるとき，x は X の元を走るという．走るということばは，run の訳語である．

X を集合とする．P を X の元についての条件とし，P の中で X の元は文字 x で表わされているとする．このとき，P をみたす元 $x \in X$ 全体からなる集合を $\{x \in X \mid P\}$ で表わす．このように，集合をその元がみたす条件によって表わすこともある．$A = \{x \in X \mid P\}$ とは，$\forall x(x \in A \Leftrightarrow (x \in X \wedge P))$ ということである．P に文字 y が現れないとき，P の中の文字 x をすべて y でおきかえたものを Q とすると，$\{x \in X \mid P\} = \{y \in X \mid Q\}$ である．これは，$\forall xP$ と $\forall yQ$ が同値であることの帰結である．

A が X の部分集合であるとき，X の元に対しての条件 P として $x \in A$ を考えれば，$A = \{x \in X \mid x \in A\}$ となる．したがって，X の任意の部分集合が，$A = \{x \in X \mid P\}$ として表わせる．$B = \{x \in X \mid Q\}$ ならば，$A \subset B$ とは，任意の $x \in X$ に対し P ならば Q がなりたつということである．

文字 x で集合 X の元を表わし，P と Q を x についての条件とする．任意の $x \in X$ に対し P ならば Q であるとき，P は Q よりも**強い**条件であるという．また，Q は P より**弱い**条件であるともいう．P が Q よりも強い条件であるとは，$\{x \in X \mid P\} \subset \{x \in X \mid Q\}$ ということである．条件 P が Q と同値であるとは，$\{x \in X \mid P\} = \{x \in X \mid Q\}$ ということである．$\{x \in X \mid P\} = X$ とは，X の元に対し，性質 P が無条件になりたつということである．このように，条件についての関係が，集合の包含関係に翻訳できることも，集合を考える利点の 1 つである．

よりみち 10　P ならば Q というとき，その意味には次の 2 とおりがありうる．1 つは，X の元 x ごとの条件を表わしている場合である．もう 1 つは，任意の $x \in X$ についてということばが省略されている場合である．1 つめの場合は X の部分集合 $\{x \in X \mid P$ ならば $Q\}$ の定義としての条件であり，2 つめの場合はこの部分集合が X と等しいということである．これは重大な違いだが，どちらの意味で使われているかは，文脈から判断するしか方法はない．

集合 $A = \{x \in X \mid P\}$ が定義されるためには，条件 P はなんでもよいわ

けではなく，P が形式化できるものでなくてはいけない．たとえば，X を自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ としたときに，$n \in \mathbb{N}$ に関する性質 P として，

(1) n が偶数である．

(2) n は 3 以上である．

はよい．m が自然数ならば，

(3) n は m 以上である．

もよい．しかし，

(4) n は十分大きい．

(5) n は限りなく大きくなる．

というのはだめである．(1), (2), (3) はそれぞれ $\exists m(m \in \mathbb{N} \wedge n = 2m), 3 \leq n, m \leq n$ のように形式化できる．(1), (2) については，それぞれの場合に，集合 $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P\}$ はただ 1 つに定まる．(3) については，集合 $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P\}$ は，自然数 m ごとに定まるものである．このようなものを集合の族とよび，2.4 節でその扱い方を解説する．(4) は，$\mathbb{N}$ の部分集合を定めないが，次のように使う．Q が自然数についての性質であり，$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} \subset \{n \in \mathbb{N} \mid Q\}$ がなりたつ自然数 m が存在するとき，十分大きい自然数に対し Q がなりたつという．(5) は，極限と関係するので，3.1 節で改めて扱う．

集合 X の元 x についての条件として，$x \neq x$ という条件を考えると，これをみたす元 x は存在しない．したがって，X の部分集合 $\{x \in X \mid x \neq x\}$ には，元がまったくない．この集合を，**空**(くう)**集合** (empty set) とよび，記号 $\emptyset$ で表わす．X が空集合であるとは，$\forall x(x \notin X)$ ということである．任意の集合 X に対し，空集合 $\emptyset$ は X の部分集合である．空集合の部分集合は，空集合だけである．

よりみち 11　空集合の記号 $\emptyset$ は，ノルウェー語のアルファベット ϕ から採られた．ヴェイユの案をブルバキが採用したものである．

X を集合とし，A と B を X の部分集合とする．X の元 x についての条件 $x \in A$ かつ $x \in B$ で定まる部分集合 $\{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$ を，A と B の**共通部分** (intersection) とよび，$A \cap B$（∩：キャップ）で表わす．$A \cap B$ を A と B の**交わり**とよぶこともある．積とよぶことも稀にあるが，あとで定義する $A \times B$ との混同を防ぐため，避けたほうがよい．C も X の部分集合であるとき，包含関

係 $C \subset A \cap B$ は，$C \subset A$ かつ $C \subset B$ と同値である．したがって，$A \cap B = A$ は，$A \subset B$ と同値である．$A \cap B = \emptyset$ であるとき，A は B と交わらないといい，$A \cap B \neq \emptyset$ であるとき，A は B と**交わる** (meet, intersect) という．

X の元 x についての条件 $x \in A$ または $x \in B$ で定まる部分集合 $\{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$ を，A と B の**合併** (union) とよび，$A \cup B$（$\cup$：カップ）で表わす．$A \cup B$ を A と B の**和** (sum) とよぶこともある．C も X の部分集合であるとき，包含関係 $A \cup B \subset C$ は，$A \subset C$ かつ $B \subset C$ と同値である．したがって，$A \cup B = A$ は，$B \subset A$ と同値である．A と B が交わらないとき，和 $A \cup B$ を $A \amalg B$ で表わし，**無縁和** (disjoint union) とよぶことがある．

よりみち 12　線形空間 $\mathbb{R}^2$ で，x 軸 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ と y 軸 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ の，集合としての和は $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ だが，部分空間としての和は $\mathbb{R}^2$ 全体である．おなじ和ということばを使うが，違うものを表わしていてまぎらわしい用語である．

「一般には違う」とは，例外的には等しくなることもあるかもしれないが，違うのがふつうであるという意味である．

共通部分と合併については，**分配則** (distribution law) とよばれる等式

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

がなりたつ．このような式を確かめるときは，**ベン図** (Venn's diagram) を考えるとわかりやすい．図 1.1 の左の図では，たて線部分が $A \cup B$ を表わし，

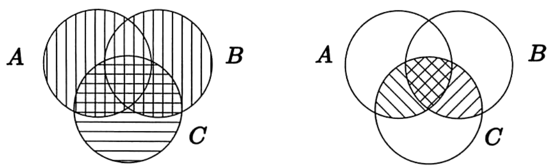


図 1.1　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

よこ線部分が C を表わす．よって，$(A \cup B) \cap C$ は，それらの重なりで表わされる．右の図では，$A \cap C$ が右下がり，$B \cap C$ が左下がりの斜線部分である．よって，$(A \cap C) \cup (B \cap C)$ はそれらをあわせたもので表わされる．

X を集合とし，$A \subset X$ を部分集合とする．X の元で A に属さないもの全体のなす集合 $\{x \in X \mid x \notin A\}$ を A の**補集合** (complement) とよび，$X \setminus A$ で表わす．記号 $X \setminus A$ にあるように，A の補集合を考えるときには，全体集合 X が特定されていることが必要である．

よりみち 13　線形空間 $\mathbb{R}^2$ で，x 軸 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ の補空間は，y 軸 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ のほかにもたくさんある．それに対し，補集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ はただ 1 つに定まる．おなじ補という字を使うが，違うものである．

補集合 $X \setminus A$ を，記号 $X - A$ で表わすことも多い．この記号は，X に減法が定義されているとき，$\{x - a \mid x \in X, a \in A\}$ を表わすこともあり，混同のおそれがある記号である．A^c と表わすこともあるが，全体集合 X が明らかでないと使えない記号である．

A の補集合の補集合 $X \setminus (X \setminus A)$ は A と等しい．$A = \{x \in X \mid P\}$ のときは，これは，等式 $\{x \in X \mid P\} = \{x \in X \mid \neg(\neg P)\}$ がなりたつということであり，条件 P の **2 重否定** (double negation) $\neg(\neg P)$ がもとの条件と同値であることを表わしている．

よりみち 14　P の 2 重否定がもとの条件 P と同値であるということは，P でないことがありえないならば，P がなりたつということである．これは，どちらともいえないという可能性を排除するということなので，**排中律** (law of excluded middle) とよぶ．

排中律を利用すれば，P の否定から矛盾を導くことで，P を証明することができる．これを**背理法** (reduction to absurdity) という．

補集合と，合併や共通部分の関係については，**ド・モルガンの公式** (de Morgan's formula) とよばれる等式

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B), \quad X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

がなりたつ．これらは，それぞれ，$\neg(P \vee Q)$ は $\neg P \wedge \neg Q$ と同値であり，$\neg(P \wedge Q)$ は $\neg P \vee \neg Q$ と同値であることを表わしている．よって，$P \vee Q$ は，

$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$ の略記であるとして，論理記号 $\vee$ を定義することもできる．

包含関係 $A \subset B$ は，図 1.2 の左の図の斜線部分が空であることを表わしている．一方，右の図のよこ線部分は $X \setminus A$，たて線部分は B をそれぞれ表わしている．したがって，$A \subset B$ は，$(X \setminus A) \cup B = X$ と同値である．$A = \{x \in X \mid P\}, B = \{x \in X \mid Q\}$ ならば，$A \subset B$ とは，$\forall x \in X(P \Rightarrow Q)$ ということである．これが，$\forall x \in X(\neg P \vee Q)$ と同値なのだから，$P \Rightarrow Q$ は，$\neg P \vee Q$ の略記と考えられる．

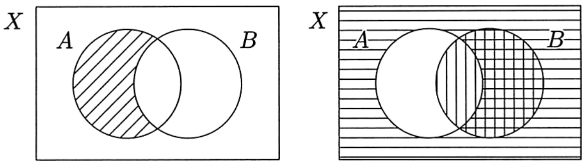


図 1.2　$A \subset B$ と $(X \setminus A) \cup B$

a と b が集合 X の元であり，これ以外に X の元がないとき，X を記号 $\{a, b\}$ で表わす．$X = \{a, b\}$ とは，$\forall x(x \in X \Leftrightarrow (x = a \vee x = b))$ ということである．$a = b$ のときは，$\{a, a\}$ を $\{a\}$ で表わす．$\{a, b\}$ と書いてあるからといって，その元がちょうど 2 個であるとは限らないことに注意する必要がある．それに対し，$\{a\}$ の元はいつも a ひとつだけである．元がたくさんあるときも同様に，$a_1, \ldots, a_n$ が集合 X の元であり，それ以外に X の元が存在しないとき，$X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ と表わす．このように，集合を，その元を**列挙**することで表わす方法がある．この方法では，空集合 $\emptyset$ を $\{\ \}$ で表わすことになる．部分集合が方程式を条件として定義されているとき，その元をすべて列挙することが方程式を解くことにあたる．

まとめ

・条件をみたす元全体のなす部分集合の性質と，論理記号の性質の関係を調べた．

・部分集合の合併と共通部分や，補集合を定義した．

問題

A 1.2.1　A, B, C を，集合 X の部分集合とする．

1. $A \cup B \subset C$ と $A \subset C \wedge B \subset C$ が同値であることを，ベン図を使って確かめよ．

2. $C \subset A \vee C \subset B$ ならば $C \subset A \cup B$ であることを示せ．

3. $C \subset A \cup B$ ならば $C \subset A \vee C \subset B$，はなりたたない．このことを，反例を与えることで示せ．

A 1.2.2　X を集合とする．X の部分集合 A と B について，次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) $X = A \amalg B$.

(2) $B = X \setminus A$.

A 1.2.3　P, Q が集合 X の元に関する条件を表わすとし，$A = \{x \in X \mid P\}$，$B = \{x \in X \mid Q\}$ とおく．$A \not\subset B$ は $A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$ と同値であることを，ベン図を使って確かめよ．このことから，$\forall x \in X(P \Rightarrow Q)$ の否定は，$\exists x \in X(P \wedge \neg Q)$ と同値であることを導け．

B 1.2.4　1. X を集合とする．X の部分集合 $A = \{x \in X \mid x \notin x\}$ は X の元ではないことを示せ．

2. すべての集合を元として含む集合は存在しないことを示せ．

よりみち 15　問題 1.2.4.2. によれば，すべての集合を元として含む集合が存在したとすると矛盾が導かれる．これを**ラッセルの背理** (Russell's paradox) という．このように，集合の構成を無制限に行うと，理論が破綻する．これを避けるために，公理的集合論が構築された．しかし，公理的集合論が矛盾を含まないことを証明することはできないことも証明された．

1.3　巾集合と積

この節では，集合の構成法を解説する．

X を集合とする．X の部分集合をすべて元として含み，それ以外の元は含まない集合を，X の**巾**(べき)**集合** (power set) とよび，$P(X)$ で表わす．Y が X の巾集合であるとは，

$$\forall x(x \in Y \Leftrightarrow x \subset X)$$

ということである．

よりみち 16　正しくは冪集合だが，漢字制限政策のため巾集合で代用している．X の元の個数が n なら $P(X)$ の元の個数は 2^n なので，$P(X)$ を巾集

合とよぶ．

A が巾集合 $P(X)$ の部分集合ならば，A の元は X の部分集合なので，A は X の部分集合の集合であるという．$P(X)$ は，X の部分集合の集合のうちで，X の部分集合をすべて元として含むただ 1 つのものである．そこで，$P(X)$ を X の部分集合全体の集合とよんで区別する．

英語では，この差異は，a set of subsets of X と the set of subsets of X のように，冠詞の違いで表わされる．

空集合 $\emptyset$ の巾集合 $P(\emptyset)$ は，空集合だけを元とする集合 $\{\emptyset\}$ である．$\emptyset \notin \emptyset$ だが $\emptyset \in P(\emptyset)$ である．よって，$\emptyset \neq P(\emptyset)$ である．$P(\emptyset)$ の部分集合は，そのただ 1 つの元を含む $P(\emptyset)$ 自身であるか，$\emptyset$ であるかのどちらかである．したがって，その巾集合は，$P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, P(\emptyset)\}$ である．

よりみち 17　$\emptyset \in P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, P(\emptyset)\}$ だから，$P(\emptyset) = \{\emptyset\} \subset P(P(\emptyset))$ である．$P(\emptyset) \subset P(\emptyset)$ だから，$P(\emptyset) \in P(P(\emptyset))$ でもある．元として含まれることと，部分集合として含まれることの違いに注意してほしい．

集合 X とその元 x を，階層が違うものとして区別して考えることができるとわかりやすい．しかし，わざわざ集合を考えることの意味は，巾集合のように集合を元として含む集合や，次章で導入する写像を元として含む集合などの抽象的な構成を，厳密に扱う基礎を与えることにある．

X と Y を集合とする．集合 X と Y に対し，それらの合併と共通部分が，新たに集合として定義される．X の元であり Y の元でもあるものすべてからなる集合 $X \cap Y = \{x \in X \mid x \in Y\}$ を，X と Y の共通部分とよぶ．X の元と Y の元をあわせたものすべてからなる集合を，X と Y の合併とよび，$X \cup Y$ で表わす．$\forall x(x \in X \cup Y \Leftrightarrow (x \in X \vee x \in Y))$ である．

平面上の点とはその座標のことであると考えることで，平面を実数 $a, b \in \mathbb{R}$ の対 (a, b) 全体の集合として定義することができる．一般の集合 X と Y に対しても，その積集合 $X \times Y$ を，X の元 a と Y の元 b の対 (a, b) 全体のなす集合として定義する．対がみたす重要な性質は，$(a, b) = (c, d)$ は $a = c$ かつ $b = d$ と同値であるという性質である．対 (a, b) の集合論的な定義は，次のようになる．$\{a, b\} = \{b, a\}$ なので，(a, b) を $\{a, b\}$ として定義することは

できない．しかし，$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$ と定義すれば，上の性質がみたされるので（問題 1.3.4），次のように定義する．

定義 1.3.1　X と Y を集合とする．

1. $a\in X$ と $b\in Y$ に対し，集合 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ を a と b の**対**（つい）(pair) とよび，(a,b) で表わす．a を (a,b) の**第 1 成分** (first component) とよび，b を (a,b) の第 2 成分とよぶ．
2. X の元と Y の元の対全体からなる集合

$$\{z\in P(P(X\cup Y))\mid \exists x\exists y(x\in X\wedge y\in Y\wedge z=\{\{x\},\{x,y\}\})\}$$

を，X と Y の**積** (product) とよび，$X\times Y$ で表わす．□

$\{a,b\}$ と区別するため，(a,b) を a と b の順序対とよび，$\{a,b\}$ を非順序対とよぶこともある．積 $X\times Y$ を**直積** (direct product) とよぶこともある．積集合はそれじたい重要な集合であるが，第 2 章で，写像を集合論的に定式化するとき，とくに役にたつ．A が X の部分集合で，B が Y の部分集合ならば，$A\times B$ は $X\times Y$ の部分集合である．

よりみち 18　X の元の個数が n で Y の元の個数が m なら $X\times Y$ の元の個数が nm なので，$X\times Y$ を積とよぶ．

集合がたくさんあるときも，帰納的に，合併と共通部分や積が定義できる．$X_1,\ldots,X_n$ を集合とする．合併と共通部分は，それぞれ $X_1\cup\cdots\cup X_n=(X_1\cup\cdots\cup X_{n-1})\cup X_n$ と $X_1\cap\cdots\cap X_n=(X_1\cap\cdots\cap X_{n-1})\cap X_n$ で定義する．積も $X_1\times\cdots\times X_n=(X_1\times\cdots\times X_{n-1})\times X_n$ で定義する．元 $x_1\in X_1,\ldots,x_n\in X_n$ からなる n **組** (n-tuple)$(x_1,\ldots,x_n)\in X_1\times\cdots\times X_n$ は，$(x_1,\ldots,x_{n-1})$ と x_n の対 $((x_1,\ldots,x_{n-1}),x_n)$ として定義する．$(x_1,\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_n)$ とは，成分ごとに等式 $x_1=y_1,\ldots,x_n=y_n$ がなりたつことである．$X_1=\cdots=X_n=X$ のときは，$X_1\times\cdots\times X_n$ を X^n で表わす．$X^1=X$ とおく．

空集合から出発して，**自然数** (natural number) を集合論的に構成することができる．$0=\emptyset$，$1=P(\emptyset)$，$2=P(P(\emptyset))$ と定義する．$1=P(\emptyset)=\{\emptyset\}$ は $0\cup\{0\}=\{\ \}\cup\{0\}=\{0\}$ であり，$2=P(P(\emptyset))=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ は，

$1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\}$ である．そこで，3 以上の自然数は，n が自然数であるとき $n+1 = n \cup \{n\}$ とおくことで，帰納的に定義する．$3 = 2+1 = \{0,1,2\}$，$4 = 3+1 = \{0,1,2,3\}, \ldots$ である．自然数 $n = \{0,1,\ldots,n-1\}$ の元の個数は，n である．自然数全体の集合 $\{0,1,2,3,\ldots\}$ を，$\mathbb{N}$ で表わす．自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ については，2.9 節でもう少しくわしく扱う．

よりみち 19　自然数には，1 つ 2 つと順に数えるときの**序数** (ordinal number) としての意味と，全部でいくつというときの**基数** (cardinal number) としての 2 つの意味がある．等式 $n = \{0,1,\ldots,n-1\}$ で，左辺の n には基数としての意味があり，右辺の $0,1,\ldots,n-1$ には序数としての意味がある．

まとめ
- 1 つの集合の部分集合全体からなる集合を，その集合の巾集合とよぶ．
- 2 つの集合の元の対全体からなる集合を，積とよぶ．
- 空集合から出発して，自然数を帰納的に定義した．

問題

A 1.3.1　次の文を形式化し，x, y, X, Y などの文字と論理記号と $=, \in, \subset, \neq, \notin$ とかっこ $(,)$ だけを使って表わせ．また，その解答が正しいことを説明せよ．

1. 空集合でない集合が存在する．
2. 巾集合が空集合であるような集合が存在する．

A 1.3.2　X を集合とする．部分集合 $A \subset X$ に対し，$P(X)$ の部分集合 $I(A)$ を $I(A) = \{C \in P(X) \mid A \subset C\}$ で定める．

1. $I(A) = I(B)$ は $A = B$ と同値であることを示せ．
2. $I(A \cup B) = I(A) \cap I(B)$ を示せ．

A 1.3.3　1. 集合 X と Y に対し，$X \subset Y$ と $P(X) \subset P(Y)$ は，同値であることを示せ．

2. $1 \subsetneqq 2$ を示せ．
3. 補集合 $P(2) \setminus 3$ の元をすべて求めよ．

4. n が自然数ならば，$n \subset P(n)$ であることを示せ．

A 1.3.4　X と Y を集合とし，$a \in X, b \in Y$ とする．

1. $(a,b) = \{A \in P(X \cup Y) \mid \{a\} \subset A \subset \{a,b\}\}$ を示せ．

2. $x \in X$ に対し，次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) $x = a$ である．

(2) 任意の $z \in (a,b)$ に対し，$x \in z$ である．

3. $y \in Y$ に対し，次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) $y = b$ である．

(2) $y \in z$ をみたす元 $z \in (a,b)$ が，ただ 1 つ存在する．

4. $x \in X, y \in Y$ に対し，次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) $x = a$ かつ $y = b$ である．

(2) $(x,y) = (a,b)$ である．

A 1.3.5　X と Y を集合とする．

1. 次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) $X \times Y = \emptyset$ である．

(2) $X = \emptyset$ または $Y = \emptyset$ である．

2. $A \subset X$ と $B \subset Y$ を，それぞれの部分集合とする．次の条件 (1) と (2) を考える．

(1) $A = X$ かつ $B = Y$ である．

(2) $A \times B = X \times Y$ である．

(1)⇒(2) であるが，(2)⇒(1) はなりたたない．(1) を修正して，(1)⇔(2) となるようにし，修正したものは確かになりたつことを示せ．

1.4　同値関係と順序

X を集合とする．集合 X の元の対についての条件 R は，X の元の間の関係を表わすと考えられる．条件 R は，その条件が定める積集合 $X \times X$ の部分集合を使って調べることができる．この節では，その中で，数学でよく現れる同値関係と順序について，基本的な用語を準備する．

定義 1.4.1　X を集合とする．

1. X の元の対についての条件を，X の 2 **項関係** (binary relation) という．

2. R が X の 2 項関係であるとき，条件 R で定義される $X \times X$ の部分集合 $\{(x,y) \in X \times X \mid R\}$ を，R の**グラフ** (graph) という．

3. R と R' を X の 2 項関係とし，$C, C' \subset X \times X$ をそのグラフとする．

$C \subset C'$ であるとき，R は R' より**細かい** (finer) という．$C = C'$ であるとき，R と R' は**同値** (equivalent) であるという． □

X の 2 項関係を，単に**関係**とよぶことも多い．関係の重要な例には，次のようなものがある．

【例 1.4.2】　X を集合とする．$x, y \in X$ に対し，$x = y$ という関係を，**相等関係** (equality) という．**自明な** (trivial) **同値関係**ということもある．相等関係のグラフ $\{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ を，**対角集合** (diagonal set) とよび，ふつう Δ_X（デルタ）で表わす．

グラフが $X \times X$ 全体になる関係を，自明な同値関係とよぶこともあるようなので，気をつけないといけない．

【例 1.4.3】　X を整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ とし，$n \in \mathbb{Z}$ を整数とする．$x, y \in \mathbb{Z}$ に対し，$x - y$ が n でわりきれるという関係を，n を法とする**合同関係** (congruence) という．$x - y$ が n でわりきれることを，ふつう $x \equiv y \bmod n$ で表わし，x と y は n を**法**（ほう） (modulus) として合同であるという．

定義 1.4.4　X を集合とし，R を X の 2 項関係とし，$(x, y) \in X \times X$ が R をみたすことを記号 $x \sim_R y$（チルダ）で表わす．

1. R が次の条件 (1)–(3) をみたすとき，R は X 上の**同値関係** (equivalence relation) であるという．

(1) 任意の $x \in X$ に対し，$x \sim_R x$ である．

(2) 任意の $x, y \in X$ に対し，$x \sim_R y$ ならば $y \sim_R x$ である．

(3) 任意の $x, y, z \in X$ に対し，$x \sim_R y$ かつ $y \sim_R z$ ならば，$x \sim_R z$ である．

2. R を X の同値関係とする．$a \in X$ に対し，$\{x \in X \mid x \sim_R a\}$ を R に関する a の**同値類** (equivalence class) という．A を X の部分集合とする．$A = \{y \in X \mid y \sim_R x\}$ をみたす $x \in A$ が存在するとき，A は R に関する X の同値類であるという． □

定義 1.4.4 の条件 (1), (2), (3) をそれぞれ，**反射律** (reflexive law)，**対称律** (symmetry law)，**推移律** (transitive law) という．例 1.4.2 の相等関係と例 1.4.3 の合同関係は，どちらも同値関係である．同値関係 $=$ に関する $x \in X$ の同値類

は $\{x\}$ である．同値関係 $\equiv \mod n$ に関する $m \in \mathbb{Z}$ の同値類 $\{l \in \mathbb{Z} \mid l = m+nr$ をみたす $r \in \mathbb{Z}$ が存在する$\}$ を $m + n\mathbb{Z}$ で表わす．$m = 0$ のときは，$n\mathbb{Z}$ で表わす．同値関係が定める商集合を，2.6 節で定義する．

よりみち 20　X を集合とすると，$X \times X$ も Δ_X も同値関係のグラフである．このように，X の同値関係の定義は，唯一のものを定めているのではなく，複数のものが共通にみたす性質を抽出して得られたものである．このように，数学の対象の共通の性質を抽象化してまとめたものを，その対象の**公理**という．

定義には，巾集合の定義のように対象を特定する定義と，同値関係の定義のように概念を設定する定義の 2 種類がある．これからでてくる位相空間や連続写像の定義なども，公理の記述によって概念を設定する定義である．

R が同値関係であるときは，x, y が R をみたすことを，定義 1.4.4 のように $x \sim_R y$ で表わし，x と y は同値であると読むことが多い．R を省略して，$x \sim y$ のように表わすことも多い．A が a の同値類であるというときは，A は a を元として含む集合である．A が X の同値類であるというときは，A は X の部分集合である．

同値関係とは違う種類の関係もある．

【例 1.4.5】　X を集合とし，$P(X)$ を巾集合とする．$A, B \in P(X)$ に対し，$A \subset B$ という関係を，**包含関係** (inclusion) という．

【例 1.4.6】　X を実数全体の集合 $\mathbb{R}$ とする．$x, y \in \mathbb{R}$ に対し，$x \leq y$ という関係を，**大小関係**という．

【例 1.4.7】　X を自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ とする．$m, n \in \mathbb{N}$ に対し，$lm = n$ をみたす自然数 $l \in \mathbb{N}$ が存在するという関係を，**整除関係** (divisibility) という．整除関係はふつう $m|n$ という記号で表わす．

定義 1.4.8　X を集合とし，R を X の 2 項関係とし，(x, y) が R をみたすことを $x <_R y$ で表わす．R が次の条件 (1)–(3) をみたすとき，R は X 上の**順序** (order) であるという．

(1) 任意の $x \in X$ に対し，$x <_R x$ である．

(2) 任意の $x, y \in X$ に対し，$x <_R y$ かつ $y <_R x$ ならば，$x = y$ である．

(3) 任意の $x, y, z \in X$ に対し，$x <_R y$ かつ $y <_R z$ ならば，$x <_R z$ である． □

定義 1.4.8 の条件 (1), (2), (3) をそれぞれ，反射律，**反対称律** (anti-symmetry law)，推移律という．例 1.4.5 の包含関係と例 1.4.6 の大小関係，例 1.4.7 の整除関係は，どれも順序である．

よりみち 21　順序については反射律がなりたつが，一般に順序を表わす記号として，等号なしの不等号を使うことが多い．整序関係の記号 | は，条件で定まる部分集合の記号 | とまぎらわしい．

まとめ

・1 つの集合の元の間の関係は，対に関する条件であり，そのグラフは積集合の部分集合を定める．

・そのような関係には，同値関係や，順序などがある．

問題

A 1.4.1　X を集合とし，巾集合の部分集合 $N \subset P(X)$ が，次の条件 (1) と (2) をみたすとする．

(1) $\emptyset \in N$ である．

(2) $A \in N$ かつ $B \in N$ かつ $C \subset A \cup B$ ならば，$C \in N$ である．

$A, B \in P(X)$ に対し，$A \sim_R B$ とは，$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \in N$ のことと定める．

1. $\sim_R$ は $P(X)$ の同値関係であることを示せ．

2. $\sim_R$ に関する $\emptyset \in P(X)$ の同値類を求めよ．

3. $X = \{0, 1, 2\}$ とし，$N = \{\emptyset, \{2\}\}$ とする．$\sim_R$ に関する $P(X)$ の同値類の個数を求めよ．

A 1.4.2　$x, y \in \mathbb{R}^2$ に対し，$x = ay$ をみたす $a \in \mathbb{R}$ が存在するとき $x \sim y$ と書き，$x = ay$ をみたす $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が存在するとき $x \sim^\times y$ と書くことにする．

1. $\sim$ は $\mathbb{R}^2$ の同値関係ではないことを示せ．

2. $\sim^\times$ は $\mathbb{R}^2$ の同値関係であることを示せ．

3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$ と交わらない，$\mathbb{R}^2$ の $\sim^{\times}$ に関する同値類をすべて求めよ．

A 1.4.3　X を集合，$P(X)$ をその巾集合とし，$P(X)$ の元 A, B の関係 R を，$A \cap B \neq \emptyset$ で定義する．

1. R は，反射律をみたさないことを示せ．
2. R は，対称律をみたすことを示せ．
3. R が推移律もみたすための，X の条件を求めよ．

AP 1.4.4　X を集合とする．A を $X \times X$ の部分集合とし，${}^tA = \{(x,y) \in X \times X \mid (y,x) \in A\}$ とおく．X の元の対 (x,y) についての次の条件 (R_A) は，X の同値関係であることを示せ．

(R_A): 自然数 $n \geq 0$ と，X の元 $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ で，すべての $i = 1, \ldots, n$ に対し，$(x_{i-1}, x_i) \in A \cup {}^tA$ をみたすものが存在する．

よりみち 22　問題 1.4.4 の同値関係 R_A を，A によって**生成される同値関係**という．

A 1.4.5　X と Y を集合とし，$<_1$ と $<_2$ をそれぞれ X と Y の順序とする．

1. 積 $X \times Y$ の 2 項関係 $<_p$ を，$(x,y) <_p (x',y')$ とは，$x <_1 x'$ かつ $y <_2 y'$ のことであると定める．2 項関係 $<_p$ は，積 $X \times Y$ の順序であることを示せ．

2. 積 $X \times Y$ の 2 項関係 $<_l$ を，$(x,y) <_l (x',y')$ とは，$x <_1 x'$ であり，さらに $x = x'$ ならば $y <_2 y'$ であることと定める．このとき，2 項関係 $<_l$ は，積 $X \times Y$ の順序であることを示せ．

よりみち 23　積集合 $X \times Y$ の順序 $<_p$ を積順序とよび，順序 $<_l$ を**辞書式順序** (lexicographic order) とよぶ．

第2章 写像

第1章でみたように，集合の用語を使って，数学の対象を，特定し記述することができる．この章で導入する写像を使うと，これらを動かしたり比較したりして，調べることができる．このように，写像は，集合それ自体とならんで，数学の重要な対象である．写像は，集合の元をもう1つの集合の元にうつす操作あるいは規則と考えられるが，集合論的には，そのグラフを考えることで，積集合の部分集合としてとらえられる．

2.1 節で，まず，写像をグラフによって定義し，その基本的な例も紹介する．そのあとの節では，写像についての基本的な用語などを解説する．まず 2.2 節で，写像の合成を定義する．2.3 節では，可逆写像により，2つの集合が同一視できることを解説する．写像は，元を元にうつす規則として定義されるが，2.5 節では，写像が定める，部分集合を部分集合にうつす操作を調べる．2.7 節では，全射と単射を定義する．2.8 節では，全射による写像の分解について解説する．

2.4, 2.6 節では，写像の用語を使って，集合の構成法を導入する．2.4 節では，無限個の集合の扱い方を解説し，その合併，共通部分，積などを構成する．2.6 節では，部分集合と双対的な対象として，同値関係による商集合を定義する．

2.9 節では，この章で準備した用語を使い，空集合から出発して，自然数，整数，有理数までを集合論的に構成する．

2.1 写像の定義

線形代数や微積分ででてくる写像には，次のようなものがある．

【例 2.1.1】 1. $A \in M(m,n;\mathbb{R})$ を，m 行 n 列の行列とする．$x \in \mathbb{R}^n$ を

$A \cdot x \in \mathbb{R}^m$ にうつすことで，写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が定まる．

2. V が線形空間ならば，V の加法は V の元の対 $(x, y) \in V \times V$ をその和 $x + y \in V$ にうつす写像 $V \times V \to V$ である．

3. $f(x, y)$ と $g(x, y)$ を，2 変数 x, y の実数値関数とする．$U \subset \mathbb{R}^2$ を，$f(x, y)$ と $g(x, y)$ の共通の定義域とすると，$(x, y) \in U$ を $(f(x, y), g(x, y)) \in \mathbb{R}^2$ にうつすことで，写像 $U \to \mathbb{R}^2$ が定まる．

一般の集合に対して，写像を定義する．写像 $f\colon X \to Y$ とは，集合 X の各元 $x \in X$ に対し，集合 Y の元 $f(x) \in Y$ を対応させる規則のことである．写像を集合論的に定式化するには，写像 $f\colon X \to Y$ はそのグラフ $\{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ で定まると考え，積 $X \times Y$ の部分集合としてとらえればよい．

定義 2.1.2　X と Y を集合とする．

1. 部分集合 Γ（ガンマ） $\subset X \times Y$ が X から Y への**写像** (mapping) の**グラフ**であるとは，任意の $x \in X$ に対し，$(x, y) \in \Gamma$ をみたす元 $y \in Y$ がただ 1 つ存在することをいう．$\Gamma \subset X \times Y$ が X から Y への写像のグラフであるとき，3 つ組 $f = (\Gamma, X, Y)$ を X から Y への写像とよび，Γ を f のグラフとよぶ．$f = (\Gamma, X, Y)$ が X から Y への写像であることを，$f\colon X \to Y$ で表わす．

2. $f\colon X \to Y$ を写像とし，$\Gamma \subset X \times Y$ を f のグラフとする．X を f の**定義域** (domain) とよぶ．$(x, y) \in \Gamma$ であるとき，$y \in Y$ を f による $x \in X$ の**値** (value) とよび，$y = f(x)$ で表わす．f は x を y にうつすといい，$x \mapsto y$ で表わすこともある．　□

値 $f(x)$ のことを f による x の**像** (image) とよぶことも多い．X を写像 $f\colon X \to Y$ の定義域とよぶが，Y については定着したよび方はないようである．この本では，Y を f の**行き先** (target) とよぶことにする．

$\Gamma \subset X \times Y$ が写像のグラフであるとは，

$$\forall x \in X \exists y \in Y((x, y) \in \Gamma \wedge \forall z \in Y((x, z) \in \Gamma \Rightarrow y = z))$$

ということである．写像 $f\colon X \to Y$ は，集合論的には，この条件をみたす $X \times Y$ の部分集合 Γ と，X, Y の 3 つ組として定義される．しかし実際には，

写像を，$x \in X$ に対し $f(x) \in Y$ を対応させる規則と考える．写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon X \to Y$ が等しいとは，f のグラフ Γ_f と g のグラフ Γ_g が等しいということであり，任意の $x \in X$ に対し $f(x) = g(x)$ ということである．写像 $f\colon X \to Y$ と写像 $g\colon Z \to W$ が等しいとは，$X = Z$ かつ $Y = W$ かつ $\Gamma_f = \Gamma_g$ ということである．

写像 $f\colon X \to Y$ を表わすには，値を表わす記号 $f(x)$ ではなく，f と書くのが正確な表現である．写像とは，$x \in X$ に対し $f(x) \in Y$ を対応させる規則だから，Y の元 $f(x)$ を表わす記号とは違う記号を使うほうがよい．しかし，実際には，値を表わす記号 $f(x)$ を流用して，写像を表わすことも多い．

よりみち 24　古くは，関数とは，変数 x が動くにつれ動く数 y のことであると考えられていた．現代の集合論的な考え方では，写像 $f\colon X \to Y$ の独立変数 x や従属変数 y とは，定義域 X や行き先の集合 Y の元を表わす記号であり，関数とは，x に y を対応させる規則のことであると考えている．

集合 X の任意の元 x を x 自身にうつす写像 $X \to X$ を，X の**恒等写像** (identity) とよび，id_X や 1_X という記号で表わす．恒等写像のグラフは対角集合 $\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ である．$x \in X$ を $(x, x) \in X \times X$ にうつす写像 δ（デルタ）$: X \to X \times X$ を**対角写像** (diagonal mapping) という．X が Y の部分集合のとき，X の任意の元 x を $x \in Y$ にうつす写像 $X \to Y$ を，**包含写像** (inclusion) とよび，ふつう i で表わす．X が空集合のとき，包含写像 $\emptyset \to Y$ は，空集合から Y へのただ 1 つの写像である．

$f\colon X \to Y$ を写像とし，$\Gamma \subset X \times Y$ を f のグラフとする．$U \subset X$ を部分集合とすると，$\Gamma \cap (U \times Y)$ は，写像 $U \to Y$ のグラフである．写像 $(\Gamma \cap (U \times Y), U, Y)$ を，f の U への**制限** (restriction) とよび，ふつう $f|_U$ で表わす．$x \in U$ に対し，$f|_U(x) = f(x)$ である．f を $f|_U$ の**延長** (extension) とよぶ．包含写像 $i\colon X \to Y$ は，恒等写像 id_Y の X への制限 $\mathrm{id}_Y|_X$ である．また，部分集合 $V \subset Y$ について $\Gamma \subset X \times V$ であるとき，Γ は写像 $X \to V$ のグラフである．写像 (Γ, X, V) を，記号を流用し，もとの写像と同じ記号を使って，$f\colon X \to V$ と表わすことが多い．

$c \in Y$ とする．すべての元 $x \in X$ を $c \in Y$ にうつす写像を**定値写像** (constant mapping) とよぶ．この写像も $c \in Y$ と同じ記号 c で表わすことが多

い．定値写像 $c\colon X \to Y$ のグラフは，$X \times \{c\} \subset X \times Y$ である．恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ が定値写像であるための条件は，X が 1 つの元だけからなることである．包含写像 $\emptyset \to Y$ が定値写像であるための条件は，Y が空集合ではないことである．

Y が数の集合であるとき，写像 $f\colon X \to Y$ を**関数** (function) とよぶ．関数とは，写像のうちで，その値が数であるもののことである．c が数であるときは，定値写像 c を**定数関数** (constant function) とよぶ．X が関数の集合であるとき，写像 $f\colon X \to Y$ を**汎関数** (functional) とよぶこともある．写像を，**作用素** (operator) とよぶことも多い．

X の部分集合 A に対し，

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ のとき}, \\ 0 & x \notin A \text{ のとき} \end{cases}$$

で定まる関数 $f\colon X \to 2 = \{0, 1\}$ を，A の**特性関数** (characteristic function) とよび，χ_A（カイ）で表わす．X の特性関数は定数関数 1 であり，$\emptyset$ の特性関数は定数関数 0 である．X の部分集合 A, B に対し，$A \subset B$ と $\chi_A \leq \chi_B$ は同値である．P を X の元についての条件とすると，$A = \{x \in X \mid P\}$ の特性関数は，

$$t_P(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ が } P \text{ をみたすとき}, \\ 0 & x \text{ が } P \text{ をみたさないとき} \end{cases}$$

で定まる関数 $t_P\colon X \to 2 = \{0, 1\}$ である．これを，P の**真理値** (truth value) **関数**という．部分集合 $A \subset X$ の特性関数 χ_A は，条件 $x \in A$ の真理値関数であり，$A = \{x \in X \mid \chi_A(x) = 1\}$ である．$f\colon X \to \{0, 1\}$ を関数とすると，f は $A = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ の特性関数である．

$f\colon X \times Y \to Z$ を写像とする．$(x, y) \in X \times Y$ の値 $f((x, y)) \in Z$ を，$f(x, y)$ のようにかっこを省略して書くのがふつうである．$b \in Y$ に対し，$x \in X$ を $f(x, b) \in Z$ にうつすことで写像 $g_b\colon X \to Z$ が定まる．同様に，$a \in X$ に対し，写像 $h_a\colon Y \to Z$ が定まる．

よりみち 25　写像 $g_b\colon X \to Z$ は，$y \in Y$ を定数 $y = b$ として，$x \in X$ だけを変数と考えたものである．偏微分の定義や，累次積分による計算でも使

われる考え方である．

積集合 $X \times Y$ の元 (x, y) をその第 1 成分 $x \in X$ にうつす写像 $X \times Y \to X$ を，**第 1 射影** (first projection) とよぶ．第 1 射影は pr_1 や p_1 で表わすことが多い．同様に，第 2 射影 $X \times Y \to Y$ も定義される．$\mathrm{pr}_1(x, y) = x$ であり，$\mathrm{pr}_2(x, y) = y$ である．

$f_1\colon X_1 \to Y_1$ と $f_2\colon X_2 \to Y_2$ を写像とする．$(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ を $(f_1(x_1), f_2(x_2)) \in Y_1 \times Y_2$ にうつすことで，写像 $X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ が定まる．これを f_1 と f_2 の**積**といい，$f_1 \times f_2$ で表わす．

$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とし，X を集合とする．$x\colon \mathbb{N} \to X$ が写像であるとき，自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し $x(n) \in X$ を x_n で表わせば，写像 $x\colon \mathbb{N} \to X$ とは，X の元の**列** (sequence)$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0, x_1, \ldots)$ のことである．X を空間的なものと考えているときは，X の**点列** (sequence) ともよぶ．添字を省略して，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を (x_n) で表わすことも多い．X が数の集合のとき，X の元の列を**数列** (sequence) とよぶ．数列とは，関数である列ということになる．

X の元の列を一般化して，X の元の族を定義する．I と X を集合とする．写像 $x\colon I \to X$ を，$i \in I$ に対し $x_i = x(i)$ とおいて，$(x_i)_{i\in I}$ で表わし，I を**添字**(そえじ)**の集合** (index set) とする X の元の**族** (family) とよぶこともよくある．添字の集合 I が文脈から明らかなときは，$i \in I$ を省略して，(x_i) と書くことも多い．族を (x_i) で表わす記法は，記号 $f(x)$ を流用して写像を表わす方法に近いが，よく使われるものである．この本では，添字の部分 $i \in I$ を大きく書きたいときには，$(x_i)_{i\in I}$ を $(x_i; i \in I)$ と書くことにする．J が I の部分集合であるとき，$(x_i)_{i\in I}$ の J への制限 $(x_i)_{i\in J}$ を，$(x_i)_{i\in I}$ の部分族という．

よりみち 26　添字の集合を表わすには，ギリシャ文字の Λ(ラムダ) を使い，その元には小文字の λ を使う習慣もある．

集合 X から Y への写像全体のなす集合を，$\mathrm{Map}(X, Y)$ で表わす．

$$\mathrm{Map}(X, Y) = \left\{ \begin{matrix} f \in P(X \times Y) \times \\ \{X\} \times \{Y\} \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} f = (\Gamma, X, Y),\ \Gamma \text{ は } X \text{ から} \\ Y \text{ への写像のグラフ} \end{matrix} \right\}$$

である．X が空集合のときは，任意の集合 Y に対し，$\emptyset \times Y = \emptyset$ の部分集合

$\emptyset$ は $\emptyset$ から Y へのただ 1 つの写像のグラフである．よって，$\mathrm{Map}(\emptyset, Y)$ はただ 1 つの元 $(\emptyset, \emptyset, Y)$ からなる集合である．

A が X の部分集合ならば，写像 $f\colon X \to Y$ にその制限 $f|_A\colon A \to Y$ を対応させる写像 $\mathrm{Map}(X, Y) \to \mathrm{Map}(A, Y)$ が定まる．これを**制限写像** (restriction mapping) という．B が Y の部分集合ならば，写像 $f\colon X \to B$ を写像 $f\colon X \to Y$ と思うことで写像 $\mathrm{Map}(X, B) \to \mathrm{Map}(X, Y)$ が定まる．

$x \in X$ に対し，写像 $f\colon X \to Y$ を $f(x) \in Y$ にうつす写像 $\mathrm{ev}_x\colon \mathrm{Map}(X, Y) \to Y$ が定義される．これを x での**値**(あたい)**写像** (evaluation mapping) という．また，$(f, x) \in \mathrm{Map}(X, Y) \times X$ に対し，$f(x) \in Y$ を対応させる写像 $e\colon \mathrm{Map}(X, Y) \times X \to Y$ も定義される．

よりみち 27　値写像 $\mathrm{ev}_x\colon \mathrm{Map}(X, Y) \to Y$ では，写像が定義域の元となり，X の元が写像を定めていて，写像と点の役割がいれかわっている．これは，数学でたびたび使われる重要な方法である．

写像 $e\colon \mathrm{Map}(X, Y) \times X \to Y$ によれば，写像の値 $f(x)$ は，対 (f, x) に対して定まるものとなる．このように，対に対して値の定まる写像が定められているとき，一方を他方の双対(そうつい)的な対象と考えることができる．関数と点に限らず，測度と関数，ベクトル場と微分形式など，双対的な対象は数学のいろいろなところででてくる．

まとめ
- 写像は，そのグラフで定まると考えれば，積集合の部分集合によって定義できる．
- 関数や数列は，特別な写像と考えられる．
- 恒等写像，包含写像，射影などの重要な写像がある．

問題

A 2.1.1　1. 次の文のうち写像を定めているものはどれかを判定し，その理由も記述せよ．写像となるものについては，その写像を $f\colon X \to Y$ のように表わし，元の対応も記号 $\mapsto$ を使って表わせ．

(1) 正の実数 $y > 0$ に対し，実数 x で $y = e^x$ をみたすものを対応させる．

(2) 実数 a に対し，$b^2 = a$ をみたす実数 b を対応させる．

(3) 実数 x に対し，$xy = 1$ をみたす実数 y を対応させる．

2. 写像とならないものについては，写像となるように定義域と行き先を修正せよ．

A 2.1.2　X を集合とする．

1. 部分集合 $A \subset X$ に対し，特性関数 $\chi_A\colon X \to 2$ のグラフを求めよ．

2. 部分集合 $A, B \subset X$ に対し，$X \setminus A$, $A \cap B$, $A \cup B$ の特性関数を，それぞれ χ_A, χ_B で表わせ．

A 2.1.3　X を集合とする．

1. $\Delta_X \subset X \times X$ を対角集合とする．特性関数 $\chi_{\Delta_X}\colon X \times X \to 2 = \{0, 1\}$ を求めよ．

2. 対角写像 $\delta\colon X \to X \times X$ のグラフを，$X \times X \times X$ の条件で定まる部分集合として表わせ．

よりみち 28　対角集合 $\Delta_X \subset X \times X$ の特性関数 $\chi_{\Delta_X}\colon X \times X \to 2$ は，**クロネッカーのデルタ関数** (Kronecker's delta function) とよばれる．

A 2.1.4　実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，$f(x) = a\cos x + b\sin x$ で定まる関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $a\cos + b\sin$ で表わす．実数 a, b, c, d に対し，次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) $\mathbb{R}^2$ での等式 $(a, b) = (c, d)$ がなりたつ．

(2) $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ での等式 $a\cos + b\sin = c\cos + d\sin$ がなりたつ．

A 2.1.5　X を集合とする．集合 $\mathrm{Map}(X, \emptyset)$ を求めよ．

2.2　写像の合成

写像 f, g に対し，g の定義域と f の行き先が一致しているとき，合成写像 $g \circ f$ が定義される．写像の合成に関係した基本的な用語を定める．

X, Y, Z が集合で，$f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ が写像であるとき，**合成写像** (composition)$g \circ f\colon X \to Z$ は，$g \circ f(x) = g(f(x))$ で定義される．Γ_f, Γ_g を f, g のグラフとすると，合成写像 $g \circ f$ のグラフは

$$\Gamma_{g \circ f} = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y((x, y) \in \Gamma_f \wedge (y, z) \in \Gamma_g)\}$$

である．恒等写像 $\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y$ に対しては，$f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f = f$ がなりたつ．合成 $g \circ f$ が定義されるためには，g の定義域 Y と f の行き先 Y が一致し

ていることが必要である．h が合成 $g \circ f$ であるとき，$h = g \circ f$ を h の**分解** (decomposition, factorization) という．

$f\colon X \to Y$ を写像とする．$U \subset X$ を部分集合とすると，f の U への制限 $f|_U$ は，f と包含写像 $i\colon U \to X$ の合成 $f \circ i$ である．部分集合 $V \subset Y$ について f のグラフ $\Gamma_f \subset X \times Y$ が $\Gamma_f \subset X \times V$ をみたすとき，$f\colon X \to Y$ は，f が定める写像 $g\colon X \to V$ と包含写像 $j\colon V \to Y$ の合成 $j \circ g$ である．

命題 2.2.1 X, Y, Z, W を集合とし，$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ を写像とする．写像 $X \to W$ の等式 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ がなりたつ． □

証明 任意の $x \in X$ に対し，$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$ を示せばよい．合成の定義より，$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$ である．同様に，$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$ である． ■

等式 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ を，写像の合成の**結合則** (associative law) という．結合則がなりたつので，写像の合成を表わすとき，かっこを省略することができる．合成を表わす記号 $\circ$ を省略して，gf のように表わすことも多い．$X = Y$ であるとき，自然数 n に対し，写像 $f^n\colon X \to X$ を $f^0 = \mathrm{id}_X$，$f^{n+1} = f^n \circ f$ で帰納的に定める．$f^1 = f$ であり，$f^2 = f \circ f$ である．

写像 $g\colon Y \to Z$ と $f\colon X \to Y$ の対 $(g, f) \in \mathrm{Map}(Y, Z) \times \mathrm{Map}(X, Y)$ を合成写像 $g \circ f \in \mathrm{Map}(X, Z)$ にうつすことで，写像 $\circ\colon \mathrm{Map}(Y, Z) \times \mathrm{Map}(X, Y) \to \mathrm{Map}(X, Z)$ が定まる．$f\colon X \to Y$ を写像とし，W を集合とすると，写像 $g\colon W \to X$ を合成写像 $f \circ g\colon W \to Y$ にうつすことで，写像 $f_*\colon \mathrm{Map}(W, X) \to \mathrm{Map}(W, Y)$ が定まる．Z を集合とすると，写像 $h\colon Y \to Z$ を合成写像 $h \circ f\colon X \to Z$ にうつすことで，写像 $f^*\colon \mathrm{Map}(Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z)$ が定まる．

よりみち 29 写像 $f\colon X \to Y$ に対して，写像 $f_*\colon \mathrm{Map}(W, X) \to \mathrm{Map}(W, Y)$ の向きはもとの写像と同じであり，$f^*\colon \mathrm{Map}(Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z)$ は逆向きになる．同じ向きであることを**共変** (covariant) 性といい，逆向きになることを**反変** (contravariant) 性という．共変のときは，星印を下につけ，反変のときは，上につける習慣である．

$f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z, h\colon X \to W, k\colon W \to Z$ を写像とする．$g \circ f = k \circ h$ であるとき，図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ W & \xrightarrow{k} & Z \end{array}$$

が**可換** (commutative) であるという．図式が可換であることを，図式の中にまわる矢印 ↻ を書くことによって表わすことも多い．もっと複雑な図式でも，合成写像で始点と終点が一致しているものはすべて一致するとき，図式は可換であるという．写像の結合則（命題 2.2.1）は，図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(Y,Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Map}(X,Z) \\ {\scriptstyle h_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_*} \\ \mathrm{Map}(Y,W) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Map}(X,W) \end{array}$$

の可換性として表わせる．

> まとめ
> ・1 つの写像の行き先と，もう 1 つの写像の定義域が一致しているとき，それらの合成が定義される．
> ・写像の合成について，結合則がなりたつ．

問題

A 2.2.1　1. X を集合とする．写像 $F, G\colon \mathrm{Map}(X,X) \times \mathrm{Map}(X,X) \to \mathrm{Map}(X,X)$ を，$F(f,g) = f \circ g$ と $G(f,g) = g \circ f$ で定める．$F = G$ であるための X についての条件を求めよ．

2. W, X, Y, Z を集合とする．図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(Y,Z) \times \mathrm{Map}(X,Y) \times \mathrm{Map}(W,X) & \xrightarrow{\circ \times 1} & \mathrm{Map}(X,Z) \times \mathrm{Map}(W,X) \\ {\scriptstyle 1\times\circ}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \circ} \\ \mathrm{Map}(Y,Z) \times \mathrm{Map}(W,Y) & \xrightarrow{\circ} & \mathrm{Map}(W,Z) \end{array}$$

は可換であることを示せ．

2.3 可逆写像

写像 $g\colon Y \to X$ が写像 $f\colon X \to Y$ の**逆写像** (inverse mapping) であるとは，$g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ がなりたつことをいう．写像 $f\colon X \to Y$ の逆写像が存在するとき，f は**可逆** (invertible) であるという．写像 $g\colon Y \to X$ と $h\colon Y \to X$ が $g \circ f = \mathrm{id}_X, f \circ h = \mathrm{id}_Y$ をみたすならば，$g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_X \circ h = h$ だから，可逆写像の逆写像は一意的である．

よりみち 30　条件をみたすものが 1 つしかないとき，その条件をみたすものは**一意的** (unique) であるという．外来語としてのユニークには，独特から転じて風変わりという意味があるが，本来はそのような意味はない．

可逆な写像 $f\colon X \to Y$ の逆写像を，$\overset{f\ \text{インヴァース}}{f^{-1}}\colon Y \to X$ で表わす．恒等写像 id_X は可逆であり，その逆写像は id_X である．$f\colon X \to Y$ が可逆なら，逆写像 $f^{-1}\colon Y \to X$ も可逆であり，その逆写像 $(f^{-1})^{-1}$ は f である．$f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ が可逆なら，合成 $g \circ f\colon X \to Z$ も可逆であり，その逆写像 $(g \circ f)^{-1}$ は $f^{-1} \circ g^{-1}$ である．

例題 2.3.1　X を集合とする．X の部分集合 A に対し特性関数 $\chi_A\colon X \to 2$ を対応させる写像 $\chi\colon P(X) \to \mathrm{Map}(X, 2)$ は，可逆であることを示せ．

解答　$\chi\colon P(X) \to \mathrm{Map}(X, 2)$ の逆写像を定める．写像 $f\colon X \to 2$ に対し X の部分集合 $\{x \in X \mid f(x) = 1\} \in P(X)$ を対応させる写像を，$S\colon \mathrm{Map}(X, 2) \to P(X)$ とする．X の部分集合 A に対し，$A = \{x \in X \mid \chi_A(x) = 1\}$ である．よって，$S \circ \chi = \mathrm{id}_{P(X)}$ である．$f\colon X \to 2$ を写像とすると，$x \in S(f)$ のとき $f(x) = 1$ であり，$x \in X \setminus S(f)$ のとき $f(x) = 0$ である．よって，$f = \chi_{S(f)}$ である．したがって，$\chi \circ S = \mathrm{id}_{\mathrm{Map}(X,2)}$ であり，S は χ の逆写像である．

例題 2.3.1 の可逆写像 $\chi\colon P(X) \to \mathrm{Map}(X, 2)$ の定義には，とくに不自然な構成をしていない．このように，自然に定まっているように思える写像を，

標準的 (canonical) な写像とよぶ.

この場合のように，標準的な可逆写像 $f\colon S \to T$ があるとき，S の元 s と T の元 $f(s)$ を同じものと考えて，S と T を同じものであるかのように扱えると便利である．この場合には，部分集合 $A \subset X$ と，その特性関数 $\chi_A\colon X \to \{0,1\}$ を同じものとみなすということである．このように考えるとき，集合 S と T を**同一視** (identify) するといい，$S = T$ と書くこともある.

これは，便利な表わし方で，これからもよく使うが，集合 S と T が等しいとは，本来は S の元と T の元が一致することだから，注意して使わないといけない．S と T を同一視するときには，どの写像により S と T が同じものであると考えているかを，明らかにしておくことが必要である.

【例 2.3.2】　n を自然数とし，$I = \{1,\ldots,n\}$ とする．X を集合とし，写像 $\mathrm{Map}(I,X) \to X^n$ を，写像 $f\colon I \to X$ に対し，X の元の組 $(f(1),\ldots,f(n)) \in X^n$ を対応させることで定める．この写像は可逆である．逆写像は，$(x_1,\ldots,x_n) \in X^n$ に対し，$f(1) = x_1,\ldots,f(n) = x_n$ で定まる写像 $f\colon I \to X$ を対応させる写像 $X^n \to \mathrm{Map}(I,X)$ である.

以下，例 2.3.2 の可逆写像により，$(x_1,\ldots,x_n) \in X^n$ を，対応する写像 $\{1,\ldots,n\} \to X$ と同一視する.

【例 2.3.3】　$m,n \geq 0$ を自然数とする．行列 $A \in M(m,n;\mathbb{R})$ に A 倍写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を対応させる写像 $M(m,n;\mathbb{R}) \to \{f \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \mid f$ は線形写像$\}$ は，可逆である．逆写像は，線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に，その標準基底に関する行列表示を対応させる写像である.

この可逆写像により，行列の積は写像の合成と対応する．行列の積の結合則は，写像の合成の結合則から導ける.

命題 2.3.4　$f\colon X \to Y$ を写像とし，Γ を f のグラフとする.

1. f が可逆であるとし，$g\colon Y \to X$ を f の逆写像とする．$x \in X$ と $y \in Y$ について，$y = f(x)$ と $x = g(y)$ は同値である．g のグラフは Γ の転置 (transpose)$\{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in \Gamma\}$ である.

2. f について，次の条件 (1) と (2) は同値である.

(1) f は可逆である.

(2) 任意の $y \in Y$ に対し，$y = f(x)$ をみたす X の元 x がただ 1 つ存在す

る. □

証明 1. $y = f(x)$ とすると，$g(y) = g(f(x)) = \mathrm{id}_X(x) = x$ である．$x = g(y)$ とすると，$f(x) = f(g(y)) = \mathrm{id}_Y(y) = y$ である．よって，g のグラフは $\{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \Gamma\}$ である．

2. (1)⇒(2): $g \colon Y \to X$ を f の逆写像とする．1. より，$y = f(x)$ は $x = g(y)$ と同値である．g は写像だから，任意の $y \in Y$ に対し，$x = g(y)$ をみたす $x \in X$ はただ 1 つ存在する．

(2)⇒(1): $C = \{(y, x) \in Y \times X \mid y = f(x)\}$ とおく．(2) より，C は写像 $g \colon Y \to X$ のグラフである．$x \in X$ とし，$y = f(x)$ とおくと，$g(y) = x$ である．よって，$g \circ f = \mathrm{id}_X$ である．$y \in Y$ とし，$g(y) = x$ とおくと，$y = f(x)$ である．よって，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ である．したがって，g は f の逆写像である． ■

よりみち 31　命題 2.3.4.2. の条件 (2) は，写像 $f \colon X \to Y$ が可逆であることの定義と同値な条件である．このように，定義と同値な条件を，**特徴づけ** (characterization) という．

系 2.3.5　X と Y を集合とする．

1. 積の部分集合 $\Gamma \subset X \times Y$ について，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) Γ は，写像 $X \to Y$ のグラフである．

(2) 第 1 射影 $\mathrm{pr}_1 \colon X \times Y \to X$ の Γ への制限 $\mathrm{pr}_1|_\Gamma \colon \Gamma \to X$ は，可逆である．

2. 1. の同値な条件がなりたっているとき，Γ は，$\mathrm{pr}_1|_\Gamma \colon \Gamma \to X$ の逆写像 γ（ガンマ）$\colon X \to \Gamma$ と $\mathrm{pr}_2|_\Gamma \colon \Gamma \to Y$ の合成 $\mathrm{pr}_2|_\Gamma \circ \gamma \colon X \to Y$ のグラフである． □

証明 1. 写像の定義より，(1) は，任意の $x \in X$ に対し $(x, y) \in \Gamma$ をみたす $y \in Y$ がただ 1 つ存在することと同値である．これは，任意の $x \in X$ に対し $\mathrm{pr}_1(z) = x$ をみたす $z \in \Gamma$ がただ 1 つ存在することと同値である．命題 2.3.4.2. より，これは (2) と同値である．

2. Γ が写像 $f \colon X \to Y$ のグラフであるとする．$(x, y) \in \Gamma$ とすると $y = f(x)$ だから，$\mathrm{pr}_2|_\Gamma = f \circ \mathrm{pr}_1|_\Gamma$ である．よって，$f = \mathrm{pr}_2|_\Gamma \circ \gamma$ である． ■

まとめ
・逆写像がある写像を，可逆写像という．
・標準的な可逆写像があるとき，2つの異なった集合を同一視できる．
・巾集合と，2元集合への写像の集合は，特性関数を考えることで同一視できる．

問題

A 2.3.1　X を集合とし，$f\colon X \to X$ を $f^2 = \mathrm{id}_X$ をみたす写像とする．f は可逆であることを示せ．

よりみち 32　$f^2 = \mathrm{id}_X$ をみたす写像を**インヴォリューション** (involution) とよぶ．

A 2.3.2　X を集合とする．

1. 値写像 $\mathrm{ev}_0\colon \mathrm{Map}(1, X) \to X$ は可逆であることを示せ．
2. 写像 $f\colon X \to X$ に対し，次の条件 (1)–(5) は同値であることを示せ．

(1) f は X の恒等写像 id_X である．
(2) 任意の集合 Y と任意の写像 $g\colon X \to Y$ に対し，$g \circ f = g$ である．
(3) 任意の写像 $g\colon X \to 2 = \{0,1\}$ に対し，$g \circ f = g$ である．
(4) 任意の集合 T と任意の写像 $g\colon T \to X$ に対し，$f \circ g = g$ である．
(5) 任意の写像 $g\colon 1 = \{0\} \to X$ に対し，$f \circ g = g$ である．

A 2.3.3　$f\colon X \to Y$ を写像とする．次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) f は可逆である．
(2) 任意の集合 Z に対し，写像 $f^*\colon \mathrm{Map}(Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z)$ は可逆である．

よりみち 33　問題 2.3.3 より，集合は，その集合から他の集合への写像が決まれば，決まってしまうものと考えられる．このことを使って，集合を他の集合への写像を使って特徴づけることを，**普遍性** (universality) による特徴づけという．

2.4　集合の族

集合が有限個あることを表わしたいときは，たとえば n 個あるとすれば，$X_1, \ldots, X_n$ のように表わせる．無限個の集合を表わしたいときは次のように

する．まず添字の集合を用意する．この本では，添字の集合は，主に I で表わすことにする．各添字 $i \in I$ に対し，集合 X_i が定まっていると考える．このようにして，I を無限集合とすれば，無限個の集合を表わすことができる．

集合 I の各元 $i \in I$ に対し集合 X_i が定まっているとき，集合 I で添字づけられた集合の**族** $(X_i)_{i\in I}$ が与えられたという．I が有限集合の場合に，それを強調したいときは，**有限族** (finite family) とよぶ．I が空集合の場合は，**空な族**とよぶ．添字の集合 I が $\{1,2,\ldots,n\}$ のときが，n 個の集合 $X_1,\ldots,X_n$ を考えることである．自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ のときは，集合の列 $X_0, X_1, \ldots$ を考えることになる．

X を集合とし，$(X_i)_{i\in I}$ を集合の族とする．任意の $i \in I$ に対し，X_i が X の部分集合であるとき，集合族 $(X_i)_{i\in I}$ は，X の部分集合の族であるという．X の部分集合の族 $(X_i)_{i\in I}$ は，巾集合 $P(X)$ の元の族と考えることができる．$\mathcal{A}$ が $P(X)$ の部分集合のとき，包含写像 $\mathcal{A} \to P(X)$ は $\mathcal{A}$ を添字の集合とする X の部分集合の族 $(A)_{A\in\mathcal{A}}$ を定める．このとき，$\mathcal{A}$ を集合族ということもある．

X の部分集合族 $(X_i)_{i\in I}$ の**合併**と**共通部分**をそれぞれ

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{x \in X \mid \exists i \in I\ x \in X_i\}, \quad \bigcap_{i\in I} X_i = \{x \in X \mid \forall i \in I\ x \in X_i\}$$

で定義する．添字 $i \in I$ を書くかわりに，それと同値な条件で代用することも多い．$X = \bigcup_{i\in I} X_i$ であるとき，X の部分集合の族 $(X_i)_{i\in I}$ は，X の**被覆** (covering) であるという．$I = \{1,2,\ldots,n\}$ のときには，$\bigcup_{i\in I} X_i = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ であり，$\bigcap_{i\in I} X_i = X_1 \cap \cdots \cap X_n$ である．集合の列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対しては，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ と $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ をそれぞれ，$\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} X_i$ と $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} X_i$ で表わすことも多い．$\mathcal{A}$ が巾集合 $P(X)$ の部分集合のとき，合併 $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ と共通部分 $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$ を，それぞれ $\bigcup \mathcal{A}$ と $\bigcap \mathcal{A}$ のように表わすこともある．

空な族の合併は，$\bigcup_{i\in\emptyset} X_i = \emptyset$ である．空な族の共通部分については，次の例題のようになる．

例題 2.4.1 X を全体集合とし，$(X_i)_{i\in\emptyset}$ を X の部分集合の空な族とする．$\bigcap_{i\in\emptyset} X_i = X$ であることを示せ．

解答 X の元 x に関する条件 $\forall i(i \in \emptyset \Rightarrow x \in X_i)$ を P で表わす．$\bigcap_{i\in\emptyset} X_i$

は，条件 P で定まる部分集合 $\{x \in X \mid P\}$ である．仮定 $i \in \emptyset$ がなりたたないから，条件 $i \in \emptyset \Rightarrow x \in X_i$ は，任意の i に対しなりたつ．よって，条件 P は任意の $x \in X$ に対してなりたち，$\{x \in X \mid P\} = X$ である．

よりみち 34　空な族の共通部分 $\bigcap_{i\in\emptyset} X_i$ は，全体集合の定め方によるので，これを考えるときには，全体集合 X を指定しておくことが必要である．

$(X_i)_{i\in I}$ を集合の族とする．Y を集合とすると，分配則

$$\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \cap Y = \bigcup_{i\in I}(X_i \cap Y), \quad \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \cup Y = \bigcap_{i\in I}(X_i \cup Y)$$

がなりたつ．$(X_i)_{i\in I}$ が X の部分集合の族なら，ド・モルガンの法則

$$X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcap_{i\in I} (X \setminus X_i), \quad X \setminus \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) = \bigcup_{i\in I}(X \setminus X_i)$$

がなりたつ．

$i, j \in I$ に対し，$i \neq j$ ならば $X_i \cap X_j = \emptyset$ であるとき，合併 $\bigcup_{i\in I} X_i$ は**無縁和**であるといい，$\coprod_{i\in I} X_i$ で表わす．$X = \coprod_{i\in I} X_i$ かつ，任意の $i \in I$ に対し $X_i \neq \emptyset$ であるとき，$(X_i)_{i\in I}$ は X の**分割** (partition) であるという．

よりみち 35　この本では，分割の各成分は空集合でないとしたが，そうでない本もある．式 $X = \coprod_{i\in I} X_i$ のことを分割とよぶこともある．同様に，式 $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ のことを被覆とよぶこともある．

$i \neq j$ であっても $X_i \cap X_j = \emptyset$ とは限らないときにも，集合族の無縁和を考えたいときがある．そのときは，次のように構成する．X を集合とし，$(X_i)_{i\in I}$ を X の部分集合の族とする．$(X_i)_{i\in I}$ の**直和** (direct sum) $\coprod_{i\in I} X_i$ を，積 $X \times I$ の部分集合

$$\coprod_{i\in I} X_i = \{(x, i) \in X \times I \mid x \in X_i\}$$

として定義する．$k \in I$ に対し，標準写像 $j_k \colon X_k \to \coprod_{i\in I} X_i$ を $j_k(x) = (x, k)$ で定義し，X_k と $j_k(X_k) = X_k \times \{k\}$ を同一視する．このとき，$i \neq i'$ ならば

$j_i(X_i) \cap j_{i'}(X_{i'}) = \emptyset$ であり，直和 $\coprod_{i\in I} X_i$ は，無縁和 $\coprod_{i\in I} j_i(X_i)$ となっている．$I = \{1, \ldots, n\}$ のときは，直和を $X_1 \amalg \cdots \amalg X_n$ で表わす．すべての $i \in I$ に対し $X_i = X$ のときは，$\coprod_{i\in I} X_i = X \times I$ である．

よりみち 36　集合族の直和は，このように部分集合の族の無縁和と標準的に同一視できるので，直和を表わす記号を流用して，無縁和も同じ記号 $\coprod_{i\in I} X_i$ で表わす．線形空間についても直和 $\bigoplus_{i\in I} V_i$ や $V \oplus W$ が定義されるが，これは，$\coprod_{i\in I} V_i$ や $V \amalg W$ とは違う集合である．同じ用語でよぶのは，圏論的な理由からである．

次に定義する積の記号は，product の頭文字 p に対応するギリシャ文字 π の，大文字である．直和を表わすのに，積の記号を逆さにした記号を使うのは，双対的な普遍性がなりたつからである．

X を集合とし，$(X_i)_{i\in I}$ を X の部分集合の族とする．X の元の族 $(x_i)_{i\in I}$ が，任意の $i \in I$ に対し，$x_i \in X_i$ をみたすとき，$(x_i)_{i\in I}$ は $(X_i)_{i\in I}$ の**元の族**であるという．$\mathrm{Map}(I, X)$ の部分集合

$$\prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \in \mathrm{Map}(I, X) \mid \forall i \in I\ x_i \in X_i\}$$

は，$(X_i)_{i\in I}$ の元の族全体のなす集合ということになる．これを，集合族 $(X_i)_{i\in I}$ の**積**とよぶ．$I = \{1, \ldots, n\}$ のときは，例 2.3.2 のように，元の族 $(x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ を組 $(x_1, \ldots, x_n)$ と同一視することで，$\prod_{i\in I} X_i$ は $X_1 \times \cdots \times X_n$ と同一視される．$(X_i)_{i\in I}$ の元の族 $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ と $j \in I$ に対し，$x_j \in X_j$ を j **成分**という．$j \in I$ に対し，$(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ をその j 成分 $x_j \in X_j$ にうつす写像 $\prod_{i\in I} X_i \to X_j$ を，j 成分への**射影**とよび，pr_j や p_j で表わす．

I が空集合であるとき，$\mathrm{Map}(\emptyset, X)$ は，包含写像 $\emptyset \to X$ をただ 1 つの元として含む集合である．このただ 1 つの元を，X の元の空な族とよぶ．空な族 $(X_i)_{i\in\emptyset}$ の積集合 $\prod_{i\in\emptyset} X_i$ は $\mathrm{Map}(\emptyset, X)$ と同じく，ただ 1 つの元を含む集合である．

よりみち 37　線形空間 0 の基底は，空な族である．0 の次元は，基底の添字集合 $\emptyset$ の元の個数 0 である．

すべての $i \in I$ に対し $X_i = X$ であるとき，$\prod_{i\in I} X_i = \mathrm{Map}(I, X)$ であるが，これを X^I とも書く．$I = \{1, \ldots, n\}$ であるとき，X^I は X^n と同一視される．$n = 0$ のときは，X^0 は $X^\emptyset = \mathrm{Map}(\emptyset, X)$ と同一視されるから，ただ 1 つの元からなる集合である．

よりみち 38　集合 X の元の個数が n で，Y の元の個数が m なら，Y^X の元の個数は m^n である．空集合から空集合への写像は，恒等写像ただ 1 つだから，$0^0 = 1$ である．

積 $\prod_{i\in I} X_i$ について，選択公理とよばれる集合論の公理がある．

選択公理 (axiom of choice)　$(X_i)_{i\in I}$ を集合族とし，任意の $i \in I$ に対し $X_i \neq \emptyset$ であるとする．このとき，積 $\prod_{i\in I} X_i$ も空集合でない．　□

選択公理は，集合論のほかの公理と違って，公理として採用することに抵抗を感じることがある．そこで，この本では，選択公理を使って証明する命題や証明には，$^{\mathrm{AC}}$ という印をつけることにした．

I が有限集合のときは，選択公理を仮定しなくても，任意の $i \in I$ に対し $X_i \neq \emptyset$ ならば，$\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$ である．これは，I の元の個数が 2 以下なら明らかであり，一般の有限集合に対しては，I の元の個数に関する帰納法で示される．また，$\prod_{i\in I} X_i$ の元 $(x_i)_{i\in I}$ が具体的に構成できるときは，選択公理を仮定しなくても，もちろん $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$ である．

$(X_i)_{i\in I}$ と $(Y_i)_{i\in I}$ を集合の族とし，$(f_i)_{i\in I}$ を写像 $f_i\colon X_i \to Y_i$ の族とする．$(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ を $(f_i(x_i))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Y_i$ にうつす写像 $\prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i$ を，$(f_i)_{i\in I}$ の**積**とよび，$\prod_{i\in I} f_i$ で表わす．任意の $i \in I$ に対し，$X_i = X, Y_i = Y, f_i = f$ であるとき，写像の積 $\prod_{i\in I} f$ は，$f_*\colon \mathrm{Map}(I, X) \to \mathrm{Map}(I, Y)$ である．$I = \{1, 2\}$ のときは，積写像 $\prod_{i\in\{1,2\}} f_i$ は，$f_1\colon X_1 \to Y_1$ と $f_2\colon X_2 \to Y_2$ の積 $f_1 \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ である．

命題 2.4.2　$(X_i)_{i\in I}$ を集合の族とし，$X = \prod_{i\in I} X_i$ とする．$i \in I$ に対し，$\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$ を射影とする．T を集合とし，$(f_i)_{i\in I}$ を写像 $f_i\colon T \to X_i$ の族とする．写像 $f\colon T \to X$ を，$t \in T$ を $(f_i(t))_{i\in I} \in X$ にうつす写像とする．

このとき，f は，任意の $i \in I$ に対し $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$ をみたすただ 1 つの写像 $T \to X$ である． □

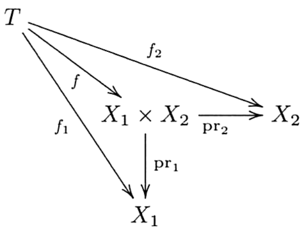
証明 任意の $j \in I$ に対し $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$ を示す．$t \in T$ とすると，$\mathrm{pr}_j(f(t)) = \mathrm{pr}_j\left((f_i(t))_{i\in I}\right) = f_j(t)$ である．よって，$f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$ である．

写像 $g\colon T \to X$ が，任意の $i \in I$ に対し $f_i = \mathrm{pr}_i \circ g$ をみたすとする．$g = f$ を示す．$t \in T$ とする．$g(t) = (x_i)_{i\in I}$ とすると，任意の $i \in I$ に対し，$f_i(t) = \mathrm{pr}_i(g(t)) = x_i$ である．よって，$g(t) = (f_i(t))_{i\in I} = f(t)$ である． ■

命題 2.4.2 で定義した写像 $f\colon T \to X = \prod_{i\in I} X_i$ も，写像の族 $(f_i)_{i\in I}$ の**積**とよび，$(f_i)\colon T \to \prod_{i\in I} X_i$ で表わす．任意の $i \in I$ に対し，$X_i = T$ かつ $f_i = \mathrm{id}_T$ であるとき，写像の族 $(\mathrm{id}_T)_{i\in I}$ の積 $T \to T^I$ を**対角写像**とよび，δ で表わす．

命題 2.4.2 を，**積の普遍性**という．$I = \{1, 2\}$ とすると，次が得られる．

系 2.4.3 X_1, X_2, T を集合とし，$\mathrm{pr}_1\colon X = X_1 \times X_2 \to X_1$ と $\mathrm{pr}_2\colon X \to X_2$ を射影とする．$f_1\colon T \to X_1, f_2\colon T \to X_2$ を写像とすると，写像 $f\colon T \to X_1 \times X_2$ で，図式



を可換にするものが，ただ 1 つ存在する． □

集合族の直和については，命題 2.4.2 と双対的な性質がなりたつ．Y を集合とし，X を集合族 $(X_i)_{i\in I}$ の直和 $X = \coprod_{i\in I} X_i$ とし，$i \in I$ に対し $j_i\colon X_i \to X$ を標準写像とする．$(f_i)_{i\in I}$ を写像 $f_i\colon X_i \to Y$ の族とすると，写像 $f\colon X \to Y$ で，任意の $i \in I$ に対し $f \circ j_i = f_i$ をみたすものが，ただ 1 つ存在する．これを**直和の普遍性**という．

よりみち 39　直和の普遍性は，積の普遍性の矢印の向きと合成の順序を逆にしたものである．このように，矢印の向きと合成の順序を逆にした性質を，もとの性質の双対的な性質という．

> まとめ
> ・添字の集合を考えることで，無限個の集合を扱うことができる．
> ・集合の族に対しても，合併と共通部分や，積が定義される．

問題

A 2.4.1　$a < b$ を実数とする．

1. $\bigcup_{a<s<t<b}[s,t] = (a,b)$ を示せ．
2. $\bigcap_{s<a<b<t}(s,t) = [a,b]$ を示せ．
3. 記号 $\bigcap_{s<a,\ b<t}(s,t)$ は，集合族の共通部分を表わしている．この集合族の添字の集合 I を，$\mathbb{R}^2$ の部分集合として表わし，この集合族が定める巾集合への写像 $I \to P(\mathbb{R})$ による，I の元の値を表わせ．

A 2.4.2　X, Y_1, Y_2 を集合とし，$f_1 \colon X \to Y_1, f_2 \colon X \to Y_2$ を写像とする．

1. 系 2.4.3 によって (f_1, f_2) が定める写像 $X \to Y_1 \times Y_2$ は，対角写像 $\delta \colon X \to X \times X$ と積写像 $f_1 \times f_2 \colon X \times X \to Y_1 \times Y_2$ の合成 $(f_1 \times f_2) \circ \delta$ であることを確かめよ．
2. $X = Y_1 = Y_2$ かつ $f_1 = f_2 = \mathrm{id}_X$ のとき，対応する写像 $X \to X \times X$ は，対角写像であることを確かめよ．

A 2.4.3　$(X_i)_{i \in I}$ を集合の族とし，T を集合とする．$(f_i)_{i \in I}$ を写像 $f_i \colon T \to X_i$ の族とする．命題 2.4.2 の写像 $(f_i) \colon T \to \prod_{i \in I} X_i$ は，対角写像 $\delta \colon T \to T^I$ と，積写像 $\prod_{i \in I} f_i \colon T^I \to \prod_{i \in I} X_i$ の合成であることを示せ．

A 2.4.4　$(X_i)_{i \in I}$ を集合族とし，T を集合とする．

1. $X = \prod_{i \in I} X_i$ とし，$i \in I$ に対し，$\mathrm{pr}_i \colon X \to X_i$ を射影とする．写像 $F \colon \mathrm{Map}(T, X) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Map}(T, X_i)$ を，$f \colon T \to X$ に，写像の族 $(\mathrm{pr}_i \circ f)_{i \in I}$ を対応させることで定める．写像 F が可逆であることを示せ．
2. $X = \coprod_{i \in I} X_i$ とし，$i \in I$ に対し，$j_i \colon X_i \to X$ を標準写像とする．写像 $G \colon \mathrm{Map}(X, T) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Map}(X_i, T)$ を，$f \colon X \to T$ に，写像の族 $(f \circ j_i)_{i \in I}$ を対応させることで定める．写像 G が可逆であることを示せ．
3. X, Y, Z を集合とする．1. と 2. の可逆写像 F と G を使って，可逆写像

$$(X \times Y)^Z \to X^Z \times Y^Z, \quad X^{Y \amalg Z} \to X^Y \times X^Z, \quad X^{Y \times Z} \to (X^Y)^Z$$

を定めよ.

よりみち 40　問題 2.4.4.3. の可逆写像は，写像の集合 Y^X が**指数法則** (exponential law) をみたすことを表わしている.

2.5　逆像と像

写像は，元の対応の規則として定義されるが，それはさらに部分集合の対応を定める. 1 つ 1 つの元がどう動くかだけでなく，まとまりとしての動きをとらえることで，写像をもっとくわしく調べることができる. これは，写像が定める巾集合の間の写像を考えることになる.

X の部分集合 A に対し，Y の部分集合 $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A\ y = f(x)\}$ を A の**像**とよぶ. $f(A)$ を $\{f(x) \mid x \in A\}$ のように表わすことも多い. $A = X$ のとき，X の像 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を f の像ともよぶ. Y の部分集合 B に対し，X の部分集合 $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ を B の**逆像** (inverse image) とよぶ. $y \in Y$ に対し，$\{y\}$ の逆像 $\{x \in X \mid f(x) = y\}$ を y の逆像あるいは**ファイバー** (fiber) とよび，$f^{-1}(y)$ で表わす. X の部分集合 A に対し，$f(A) = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\}$ である. Y の部分集合 B に対し，$f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y)$ である.

$\Gamma = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subset X \times Y$ を f のグラフとし，$\mathrm{pr}_1\colon X \times Y \to X$ と $\mathrm{pr}_2\colon X \times Y \to Y$ を射影とする. X の部分集合 A に対し，$f(A) = \mathrm{pr}_2(\mathrm{pr}_1^{-1}(A) \cap \Gamma)$ であり，Y の部分集合 B に対し，$f^{-1}(B) = \mathrm{pr}_1(\mathrm{pr}_2^{-1}(B) \cap \Gamma)$ である.

よりみち 41　写像 $f\colon X \to Y$ に対し，逆像 $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid y = f(x)\}$ は X の部分集合である. f が可逆なときには，同じ記号で逆写像 $f^{-1}\colon Y \to X$ による像として X の元を表わす. このときは，1 つめの意味での $f^{-1}(y)$ はただ 1 つの元からなる集合であり，その元が 2 つめの意味での $f^{-1}(y)$ である.

$X \cap P(X) \neq \emptyset$ のときは，X の部分集合 A が，X の元であることもありうる. この場合には，記号 $f(A)$ の意味は A を X の部分集合と考えるか X の元と考えるかで違うので，気をつける必要がある.

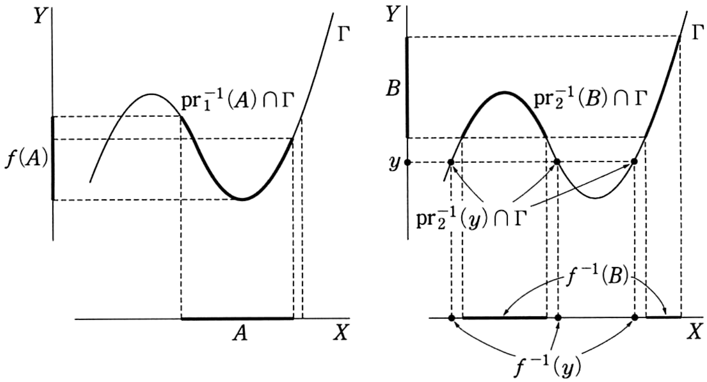


図 2.1　$f(A)$ と $f^{-1}(B), f^{-1}(y)$

X の像 $f(X)$ を f の**値域** (range) とよぶこともあるが，f の行き先 Y を f の値域とよぶこともあるので，まぎらわしい用語である．

逆像 $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ では，X の部分集合を，その元がみたす条件によって記述している．それに対し，像を表わす記号 $\{f(x) \mid x \in A\}$ は，元を列挙する記述に近い表わし方である．

Y の部分集合 B が，X の部分集合 A によって，$B = f(A)$ と表わされているとき，f の A への制限 $f|_A\colon A \to B$ を，B の**パラメータ表示** (parametrization) ともいう．

よりみち 42　$f^{-1}(y) \neq \emptyset$ は，$f(x) = y$ をみたす $x \in X$ が存在することである．このことを，「$x \in X$ を適当にとれば $f(x) = y$ となる」ということがある．「任意の $x \in X$ に対し $f(x) = y$ となる」というと $f^{-1}(y) = X$ ということである．「適当に」と「任意の」は，似た意味のことばだが，数学では全く違う意味で使われていることがわかる．

$f^{-1}(y) \neq \emptyset$ を，「X の元 x が存在して $f(x) = y$ をみたす」ということも多い．これは不自然な表現だが，“There exists an element x of X such that $f(x) = y$.” の直訳として，よく使われるものである．

【例 2.5.1】　X を集合とし，$(A_i)_{i\in I}$ を X の部分集合の族とする．

1. $\bigcup_{i\in I} A_i$ は，$X \times I$ の部分集合 $\coprod_{i\in I} A_i = \{(x, i) \in X \times I \mid x \in A_i\}$ の

像，$\mathrm{pr}_1(\coprod_{i\in I} A_i)$ である．

2. $\delta\colon X \to X^I$ を対角写像とすると，$\bigcap_{i\in I} A_i = \delta^{-1}\left(\prod_{i\in I} A_i\right)$ である．

$A \in P(X)$ に $f(A) \in P(Y)$ を対応させることで，写像 $f_*\colon P(X) \to P(Y)$ が定まる．$B \in P(Y)$ に $f^{-1}(B) \in P(X)$ を対応させることで，写像 $f^*\colon P(Y) \to P(X)$ が定まる．写像 $f_*\colon P(X) \to P(Y)$ は共変的であり，$f^*\colon P(Y) \to P(X)$ は反変的である．写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ の合成 $g\circ f$ については，$A \subset X$ に対し $(g\circ f)(A) = g(f(A))$ であり，$C \subset Z$ に対し $(g\circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ である．

写像 $f\colon X \to Y$ のグラフは，積写像 $f \times \mathrm{id}_Y\colon X \times Y \to Y \times Y$ による，対角集合 $\Delta_Y \subset Y \times Y$ の逆像 $(f \times \mathrm{id}_Y)^{-1}(\Delta_Y)$ である．

命題 2.5.2 $f\colon X \to Y$ を写像とする．

1. X の部分集合 A と Y の部分集合 B について，$f(A) \subset B$ と $A \subset f^{-1}(B)$ は同値である．

2. f による像について，次の (1)–(3) がなりたつ．

(1) X の部分集合 A に対し，$A \subset f^{-1}(f(A))$ である．

(2) X の部分集合 A と A' に対し，$A' \subset A$ ならば $f(A') \subset f(A)$ である．

(3) X の部分集合の族 $(A_i)_{i\in I}$ に対し，$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ であり，$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ である．

3. f による逆像について，次の (1)–(3) がなりたつ．

(1) Y の部分集合 B に対し，$f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$，$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ である．

(2) Y の部分集合 B と B' に対し，$B \subset B'$ ならば $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$ である．

(3) Y の部分集合の族 $(B_i)_{i\in I}$ に対し，$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ であり，$f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ である． □

証明 1. どちらも，$x \in A$ ならば $f(x) \in B$ ということと同値である．

2. (1) $f(A) = B$ とおけば，1. より $A \subset f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A))$ である．

(2) (1) より，$A' \subset A \subset f^{-1}(f(A))$ である．よって，1. より $f(A') \subset f(A)$ である．

(3) $y \in Y$ に対し，$y \in f(\bigcup_{i\in I} A_i)$ は，$f^{-1}(y) \cap \bigcup_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ と同値である．$f^{-1}(y) \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(f^{-1}(y) \cap A_i)$ だから，これは，$f^{-1}(y) \cap A_i \neq \emptyset$ となる $i \in I$ が存在することと同値であり，$y \in f(A_i)$ となる $i \in I$ が存在することとも同値である．これはさらに $y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ と同値だから，$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ が示された．

任意の $j \in I$ に対し，$\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_j$ である．よって (2) より，$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset f(A_j)$ である．したがって，$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ である．

3. (1) $A = f^{-1}(B)$ とおけば，1. より，$f(f^{-1}(B)) = f(A) \subset B$ である．さらに，$f(f^{-1}(B)) \subset f(X)$ だから，$f(f^{-1}(B)) \subset f(X) \cap B$ である．$y \in f(X) \cap B$ とし，$x \in f^{-1}(y)$ とすると，$x \in f^{-1}(y) \subset f^{-1}(B)$ だから，$y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ である．よって，$f(X) \cap B \subset f(f^{-1}(B))$ である．

$x \in X$ に対し，$x \in f^{-1}(B)$ と $f(x) \in B$ は同値である．対偶をとれば，$x \in X \setminus f^{-1}(B)$ と $f(x) \in Y \setminus B$ は同値である．よって，$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ である．

(2) $A = f^{-1}(B)$ とおけば，1. より，$f(f^{-1}(B)) = f(A) \subset B \subset B'$ である．よって，1. より $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$ である．

(3) $x \in X$ に対し，$x \in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)$ は $f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i$ と同値であり，任意の $i \in I$ に対し $f(x) \in B_i$ であることと同値である．これは，任意の $i \in I$ に対し $x \in f^{-1}(B_i)$ であることと同値だから，$x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ であることとも同値である．

$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ の証明も同様だから，省略する． ■

> まとめ
>
> ・写像は，巾集合の間に同じ向きの写像と逆向きの写像を定める．

問題

A 2.5.1　X, Y を集合とし，P を X の元と Y の元の対に関する条件とする．$A = \{(x, y) \in X \times Y \mid P\}$ とおく．

1. $\forall x \in X \exists y \in Y P$ は，$\mathrm{pr}_1(A) = X$ と同値であることを示せ．
2. $\exists y \in Y \forall x \in X P$ は，$\{y \in Y \mid \mathrm{pr}_2^{-1}(y) \subset A\} \neq \emptyset$ と同値であることを示せ．

A 2.5.2　1. 写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と，$\mathbb{R}$ の部分集合 A で，$f^{-1}(f(A)) = A$ をみたさない

ものの例を，1 つあげよ．

2. さらに，$\mathbb{R}$ の部分集合 A' で，$f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ をみたさないものの例を，1 つあげよ．

A 2.5.3 $f\colon X \to Y$ を写像とし，$f_*\colon P(X) \to P(Y)$ を，$A \subset X$ に対し $f_*(A) = f(A)$ で定める．$f_*(P(X)) = P(f(X))$ を示せ．

2.6 商集合

同値関係と写像の関係を調べる．まず，写像 $f\colon X \to Y$ が定める，定義域 X の同値関係について考える．

命題 2.6.1 X と Y を集合とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

1. $x, x' \in X$ に対し $f(x) = f(x')$ であるという関係 R_f は，X の同値関係である．

2. 同値関係 R_f のグラフ $C_f = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}$ は，$f \times f\colon X \times X \to Y \times Y$ による逆像 $(f \times f)^{-1}(\Delta_Y)$ である．$a \in X$ の，同値関係 R_f に関する同値類は，ファイバー $f^{-1}(f(a))$ である．

3. X の部分集合の族 $(f^{-1}(y))_{y \in f(X)}$ は，X の分割である．□

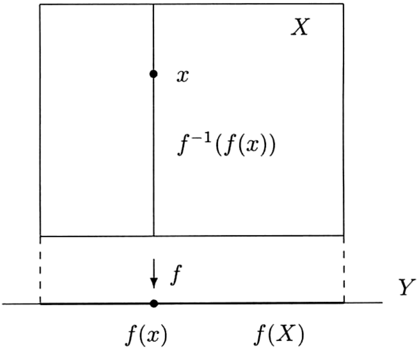


図 2.2 像とファイバー

証明 1. 反射律，対称律と推移律を確かめればよい．$x \in X$ に対し $f(x) = f(x)$ だから，反射律がなりたつ．$x, x' \in X$ に対し，$f(x) = f(x')$ ならば

$f(x') = f(x)$ だから，対称律がなりたつ．$x, x', x'' \in X$ に対し，$f(x) = f(x')$ かつ $f(x') = f(x'')$ ならば，$f(x) = f(x'')$ だから，推移律がなりたつ．

2. $(x, x') \in X \times X$ に対し，$(f \times f)(x, x') = (f(x), f(x'))$ だから，条件 $f(x) = f(x')$ は $(f \times f)(x, x') \in \Delta_Y$ と同値である．

$x \in X$ に対し，$f(x) = f(a)$ は $x \in f^{-1}(f(a))$ と同値である．

3. $f(X) = \bigcup_{y \in f(X)} \{y\}$ だから，命題 2.5.2.3.(3) より，$X = f^{-1}(f(X)) = \bigcup_{y \in f(X)} f^{-1}(y)$ である．さらに，$y \neq y'$ ならば $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(y') = f^{-1}(\{y\} \cap \{y'\}) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ である．$y \in f(X)$ ならば $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ である． ■

定義 2.6.2　X と Y を集合とし，$f \colon X \to Y$ を写像とする．$x, x' \in X$ に対し，$f(x) = f(x')$ という条件で定まる同値関係を，f **が定める同値関係**とよび，R_f で表わす． □

【例 2.6.3】　$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (\cos t, \sin t)$ で定める．f が定める同値関係は，$t - s = 2n\pi$ をみたす整数 n が存在するという関係である．

逆に，集合 X の同値関係により，巾集合 $P(X)$ への写像が定まる．

定義 2.6.4　X を集合とし，R を X の同値関係とする．(x, y) が R をみたすことを，$x \sim_R y$ で表わす．$x \in X$ を x の同値類 $\{y \in X \mid y \sim_R x\} \in P(X)$ にうつす写像 $q \colon X \to P(X)$ の像 $q(X)$ を，X の R による**商集合** (quotient set) とよび，X/R で表わす． □

$x \in X$ に対し，$q(x) \in P(X)$ を x の**類** (class) とよび，ふつう $\bar{x}$ で表わす．$q \colon X \to P(X)$ が定める写像 $q \colon X \to X/R$ について定着したよび方はないようなので，この本では，**商写像** (quotient mapping) とよぶ．射影とよぶこともある．商写像 $q \colon X \to X/R$ が可逆であるための条件は，R が相等関係と同値であることである．このとき，q によって，X を X/R と同一視することができるが，それは，x と $\{x\}$ を同一視することになる．

商写像 $q \colon X \to X/R$ が定める同値関係 R_q は，もとの同値関係 R と同値である．同値関係 R_q が R と同値であるとは，R_q のグラフ $C_q = \{(x, y) \in X \times X \mid q(x) = q(y)\}$ が R のグラフと等しいことである．

命題 2.6.5 X を集合とし，R を X の同値関係とする．

1. 商写像 $q\colon X \to X/R$ が定める同値関係 R_q は，R と同値である．

2. $A \in X/R \subset P(X)$ に対し，ファイバー $q^{-1}(A) = \{x \in X \mid q(x) = A\} \subset X$ は，A と等しい． □

証明 1. $x, y \in X$ に対し，$x \sim_R y$ と $q(x) = q(y)$ が同値であることを示せばよい．$q(x) = \{z \in X \mid z \sim_R x\}$ だから，$x, y \in X$ に対し，次の条件 (R) と (Q) が同値であることを示せばよい．

(R) $x \sim_R y$.

(Q) 任意の $z \in X$ に対し，$z \sim_R x$ と $z \sim_R y$ は同値である．

$(R) \Rightarrow (Q)$: $x \sim_R y$ とする．$z \sim_R x$ ならば，推移律より $z \sim_R y$ である．$x \sim_R y$ と対称律より $y \sim_R x$ だから，$z \sim_R y$ ならば，推移律より $z \sim_R x$ である．

$(Q) \Rightarrow (R)$: 任意の $z \in X$ に対し，$z \sim_R x$ と $z \sim_R y$ は同値であるとする．反射律より，$x \sim_R x$ だから，$x \sim_R y$ である．

2. $A = q(x), x \in X$ とする．命題 2.6.1.2. より，ファイバー $q^{-1}(A) = q^{-1}(q(x))$ は，同値関係 R_q に関する x の同値類である．1. より，R_q に関する同値類は，R に関する同値類 $q(x) = A$ に等しい． ■

命題 2.6.5.2. と命題 2.6.1.3. より，X の部分集合の族 $(q^{-1}(A))_{A \in q(X)} = (A)_{A \in X/R}$ は，X の分割である．

定義 2.6.6 X を集合とし，R を X の同値関係とする．

1. X の分割 $(A)_{A \in X/R}$ を，R による X の**類別** (classification) という．

2. S を X の部分集合とする．商写像 $q\colon X \to X/R$ の S への制限 $q|_S\colon S \to X/R$ が可逆写像であるとき，S は R に関する**完全代表系** (complete set of representatives) であるという． □

命題 2.3.4.2. より，$S \subset X$ が R に関する完全代表系であるための条件は，任意の $x \in X$ に対し，ファイバー $q|_S^{-1}(\bar{x}) = \{y \in S \mid y \sim_R x\}$ の元がただ 1 つであることである．

よりみち 43　商集合は，初心者にとってわかりにくいという定評がある．上のように定式化してみると，X と，X の巾集合 $P(X)$ という，階層の違うものの間の写像およびその像を考えるあたりに，その原因がありそうである．実数の，有理数の切断としての定義にも，同じような難しさがある．

これを避けるには，上のような集合論的構成は気にせず，商集合 X/R を $x \in X$ に対する記号 $\bar{x}$ の集まり $\{\bar{x} \mid x \in X\}$ であって，$\bar{x} = \bar{y}$ と $x \sim_R y$ とが同値であるようなものと考えるのがわかりやすい．商集合の性質として使うものは，ふつうはこの性質だけである．商集合を扱いなれてくると，$\bar{x}$ の上線 ‾ を省略することも多い．

$S \subset X$ が R に関する完全代表系ならば，商写像の制限 $q|_S\colon S \to X/R$ によって S と X/R を同一視することができる．しかし，包含写像 $S \to X$ は X への写像であるのに対し，商写像 $q\colon X \to X/R$ は X からの写像だから，完全代表系で商集合を代用するのは，よい方法とはいえない．

わり算には，6 個のものを 3 人でわけると 1 人あたり 2 個という意味のものと，6 個のものを 2 個ずつわけると 3 人分という意味のものとの，2 つがある．商集合の考えは，後者のものに近い．前者のものとの関係は，写像の標準分解で与えられる．

【例 2.6.7】　$n \geq 1$ を自然数とする．$\mathbb{Z}$ の n を法とする合同関係 $\equiv \bmod n$ による商集合を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で表わす．$n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の完全代表系であり，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元の個数は n である．

よりみち 44　$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は代数で使われる記法である．トポロジーでは $\mathbb{Z}_n$ と書かれる．n が素数 p のときには，これは p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ との混乱を招く記号である．

写像が定める同値関係による商集合については，次の性質がなりたつ．

命題 2.6.8　$f\colon X \to Y$ を写像とし，R_f を f が定める同値関係，$q\colon X \to X/R_f$ を商写像，$i\colon f(X) \to Y$ を包含写像とする．このとき，$f = i \circ \bar{f} \circ q$ をみたす写像 $\bar{f}\colon X/R_f \to f(X)$ が，ただ 1 つ存在する．写像 $\bar{f}\colon X/R_f \to f(X)$ は，可逆である．□

証明 写像 $\tilde{g}\colon Y \to P(X)$ を，$y \in Y$ に対し $\tilde{g}(y) = f^{-1}(y)$ で定める．$x \in X$ に対し，$\tilde{g}(f(x)) = f^{-1}(f(x))$ は，命題 2.6.1.2. より，x の R_f に関する同値類 $q(x) \in X/R_f$ である．よって，$\tilde{g} \circ f = q$ であり，$\tilde{g}(f(X)) = q(X)$ である．したがって，$\tilde{g}$ の $f(X)$ への制限は，写像 $g\colon f(X) \to X/R_f$ を定め，$g \circ f = q$ である．

$g\colon f(X) \to X/R_f$ が可逆であることを示す．命題 2.3.4.2. より，任意の $w \in X/R_f$ に対し，$w = g(y)$ をみたす $y \in f(X)$ がただ 1 つ存在することを示せばよい．$w = \bar{x} \in X/R_f$ とすると，$y = f(x)$ とおけば $w = q(x) = g(f(x)) = g(y)$ である．$w = g(y)$ ならば，$x \in w = f^{-1}(y)$ だから $y = f(x)$ であり，$w = g(y)$ をみたす $y \in f(X)$ はただ 1 つである．

$\bar{f}\colon X/R_f \to f(X)$ を g の逆写像とする．任意の $x \in X$ に対し，$f(x) = \bar{f}(g(f(x))) = \bar{f}(q(x))$ だから，$f = i \circ \bar{f} \circ q$ である．写像 $h\colon X/R_f \to f(X)$ が $f = i \circ h \circ q$ をみたすならば，任意の $x \in X$ に対し $h(\bar{x}) = h(q(x)) = f(x) = \bar{f}(\bar{x})$ だから，$h = \bar{f}$ である．■

よりみち 45 命題 2.6.8 の証明では，条件をみたす写像 $\bar{f}$ を構成した．存在を証明するには，このように，構成する方法のほかに，個数を数えて 0 でないことを示す方法，存在しないことを仮定して矛盾を導くという背理法による方法，選択公理から導く方法など，いろいろな方法がある．あとのものほど，具体性に欠けるものなので，できる限り，先の方法によって証明することが望ましい．

f の分解

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ {\scriptstyle q}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle i} \\ X/R_f & \xrightarrow{\quad \bar{f} \quad} & f(X) \end{array}$$

を，f の**標準分解** (canonical decomposition) といい，$\bar{f}\colon X/R_f \to f(X)$ を f によってひきおこされる可逆写像という．f によってひきおこされる可逆写像 $\bar{f}$ により，X の商集合 X/R_f を Y の部分集合 $f(X)$ と同一視することができる．商集合 X/R_f を f の**余像** (coimage) という．

【例 2.6.9】 例 2.6.3 の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ が定める同値関係 R_f による商集

合 $\mathbb{R}/R_f$ を，$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ で表わす．f の像は**円周** (circle) $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ であり，f の標準分解は可逆写像 $\bar{f}\colon \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to S^1$ を定める．半開区間 $[0,2\pi)$ は R_f の完全代表系であり，商写像の制限 $[0,2\pi) \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ は可逆である．

よりみち 46　X と Y が群や環などの代数系であり，$f\colon X \to Y$ が準同形であるとき，$\bar{f}\colon X/R_f \to f(X)$ は同形である．これを準同形定理という．これに対し，X と Y が位相空間であり，$f\colon X \to Y$ が連続写像であっても，$\bar{f}\colon X/R_f \to f(X)$ は同相写像であるとは限らない．

> まとめ
> ・写像は，定義域の集合に同値関係を定める．
> ・集合の同値関係による商集合は，もとの集合の元の同値類からなる集合である．
> ・どんな写像も，商写像と可逆写像と包含写像の合成に分解される．

問題

A 2.6.1　$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とする．X を定義域とする写像 f で，f が定める同値関係による分割が次のものとなるものを，それぞれ 1 つ求めよ．

1. X の，原点を中心とする同心円による分割．
2. X の，原点を端点とする半直線による分割．

A 2.6.2　1. $x,y \in \mathbb{R}^2$ に対し $x-y \in \mathbb{Z}^2$ で定まる $\mathbb{R}^2$ の同値関係 R による商集合を，$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ で表わす．$\mathbb{R}^4$ の部分集合 T^2 を，$T^2 = \{(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2 = u^2+v^2 = 1\}$ で定める．写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ を，$f(s,t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ で定める．f の標準分解は可逆写像 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to T^2$ を定めることを示せ．

2. $\mathbb{C}$ の同値関係 R を，$z,w \in \mathbb{C}$ に対し，$z-w = 2\pi\sqrt{-1}n$ をみたす整数 $n \in \mathbb{Z}$ が存在するという条件で定め，商集合を $\mathbb{C}/\mathbb{Z}(1)$ で表わす．$\mathbb{C}^\times = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$ とおくと，指数関数 $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の標準分解は，可逆写像 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}(1) \to \mathbb{C}^\times$ を定めることを示せ．

3. **上半平面** (upper half plane) $H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$ の同値関係 R を，$\tau,\sigma \in H$ に対し，$\tau-\sigma \in \mathbb{Z}$ という条件で定め，商集合を $H/\mathbb{Z}$ で表わす．$\Delta^* = \{q \in \mathbb{C} \mid 0 < |q| < 1\}$ とおき，関数 $q\colon H \to \mathbb{C}$ を $q(\tau) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ で定めると，q の標準分解は可逆写

像 $H/\mathbb{Z} \to \Delta^*$ を定めることを示せ．

4. 巾集合への写像 $p\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to P(\mathbb{R}^n)$ を，$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ を x によって生成される部分空間 $\mathbb{R} \cdot x = \{a \cdot x \mid a \in \mathbb{R}\}$ にうつすことで定める．$\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}) = \{L \in P(\mathbb{R}^n) \mid L$ は $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間 $\}$ とし，$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の同値関係 $\sim$ を，$x \sim y$ とは，$x = ay$ をみたす $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ が存在することと定める．このとき，写像 p の標準分解は，可逆写像 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}/\!\sim\ \to \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ を定めることを示せ．

A 2.6.3 X を集合とし，$A \subset X$ を部分集合とする．

1. X の 2 項関係 $\sim_A$ を，$x, y \in X$ に対し，$x \sim_A y$ とは，$x = y$ または $x, y \in A$ で定める．$\sim_A$ は同値関係であることを示せ．

2. $X/\!\sim_A$ を商集合とし，$q\colon X \to X/\!\sim_A$ を商写像とする．$A \neq \emptyset$ なら，q の $X \setminus A$ への制限は，可逆写像 $q|_{X\setminus A}\colon X \setminus A \to (X/\!\sim_A) \setminus \{A\}$ を定めることを示せ．

A 2.6.4 X を集合とし，$f\colon X \to X$ を写像，R_f を f が定める同値関係とする．$f^2 = f$ ならば，$f(X)$ は R_f に関する完全代表系であることを示せ．

AP 2.6.5 $f\colon X \to Y$ を写像とし，C を Y の同値関係のグラフとする．

1. $f \times f\colon X \times X \to Y \times Y$ による逆像 $(f \times f)^{-1}(C) \subset X \times X$ は，X の同値関係のグラフであることを示せ．

2. $g\colon Y \to Z$ を写像とし，R_g を $g\colon Y \to Z$ が定める同値関係とする．C を R_g のグラフとすると，$(f \times f)^{-1}(C)$ は合成写像 $g \circ f\colon X \to Z$ が定める同値関係のグラフであることを示せ．

AP 2.6.6 X を集合とする．巾集合の巾集合 $P(P(X))$ の部分集合 $\mathcal{P}$ と，$\mathrm{Map}(X, P(X))$ の部分集合 $\mathcal{Q}$ と，$P(X \times X)$ の部分集合 $\mathcal{R}$ を，それぞれ

$$\mathcal{P} = \{P \in P(P(X)) \mid (A)_{A\in P} \text{は } X \text{ の分割である }\},$$

$$\mathcal{Q} = \{q \in \mathrm{Map}(X, P(X)) \mid x \in X \text{ ならば } q^{-1}(q(x)) = q(x) \text{ である }\},$$

$$\mathcal{R} = \{C \in P(X \times X) \mid C \text{ は } X \text{ の同値関係のグラフである }\}$$

で定める．

1. $q \in \mathcal{Q}$ ならば像 $q(X) \subset P(X)$ は $\mathcal{P}$ の元であり，$q \in \mathcal{Q}$ を $q(X) \in \mathcal{P}$ にうつす写像 $F\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ は，可逆であることを示せ．

2. $G\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ を，$q \in \mathcal{Q}$ を q が定める同値関係のグラフ $C_q \in \mathcal{R}$ にうつす写像とすると，G は可逆であることを示せ．

3. R を X の同値関係とし，$C \in \mathcal{R}$ をそのグラフとする．$q = G^{-1}(C) \in \mathcal{Q}$ は，商写像 $X \to X/R$ と包含写像 $X/R \to P(X)$ の合成であり，さらに $F(q) \subset P(X)$ は商集合 X/R であることを示せ．

2.7　単射と全射

写像の標準分解より，部分集合の包含写像と商集合への商写像や，これらと可逆写像の合成はとくに基本的な写像であることがわかる．これらをそれぞれ，単射と全射とよび，その性質を調べる．

定義 2.7.1　X と Y を集合とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

1. X の任意の元 x に対し $f^{-1}(f(x)) = \{x\}$ であるとき，$f\colon X \to Y$ は**単射** (injection, monomorphism) であるという．

2. Y の任意の元 y に対し $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ であるとき，$f\colon X \to Y$ は**全射** (surjection, epimorphism) であるという．

3. f が全射かつ単射であるとき，f は**全単射** (bijection) であるという．

□

部分集合 $X \subset Y$ からの包含写像 $i\colon X \to Y$ は単射である．商集合 X/R への商写像 $q\colon X \to X/R$ は全射である．集合 X の恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ は全単射である．

単射と全射は，それぞれ次のように特徴づけられる．

命題 2.7.2　$f\colon X \to Y$ を写像とする．

1. 次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) f は単射である．

(2) f が定める同値関係 R_f は相等関係と同値である．

(3) f が定める写像 $X \to f(X)$ は可逆である．

2. 次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) f は全射である．

(2) $f(X) = Y$ である．

(3) X の同値関係 R と商集合からの可逆写像 $\bar{f}\colon X/R \to Y$ で，$q\colon X \to X/R$ を商写像とすると，$f = \bar{f} \circ q$ をみたすものが存在する．　□

証明　1. (1)⇒(2): f を単射とする．任意の $x, x' \in X$ に対し，$f(x) = f(x')$ と $x' \in f^{-1}(f(x))$ と $x = x'$ はすべて同値である．よって，同値関係 R_f は相

等関係と同値である．

(2)⇒(3): 関係 R_f が相等関係と同値であるとする．$f\colon X \to Y$ の標準分解を $i \circ \bar{f} \circ q\colon X \to X/R_f \to f(X) \to Y$ とすると，商写像 $q\colon X \to X/R_f$ は可逆である．よって，f が定める写像 $\bar{f} \circ q\colon X \to f(X)$ は可逆である．

(3)⇒(1): f が定める写像 $X \to f(X)$ が可逆であるとする．可逆写像の特徴づけ（命題 2.3.4.2.）より，任意の $x \in X$ に対し，$f^{-1}(f(x))$ の元は x ただ 1 つである．

2. (1)⇒(2): f が全射ならば，$f(X) = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \neq \emptyset\}$ は Y と等しい．

(2)⇒(3): $f\colon X \to Y$ の標準分解を $i \circ \bar{f} \circ q\colon X \to X/R_f \to f(X) \to Y$ とする．$f(X) = Y$ ならば，$f = \bar{f} \circ q$ である．

(3)⇒(1): $\bar{f}$ の逆写像を $g\colon Y \to X/R$ とする．$y \in Y$ とすると，$f^{-1}(y) = (\bar{f} \circ q)^{-1}(y) = q^{-1}(\bar{f}^{-1}(y)) = q^{-1}(g(y)) = g(y) \neq \emptyset$ である． ■

$f\colon X \to Y$ が単射ならば，f が定める可逆写像 $f\colon X \to f(X)$ により，X を Y の部分集合 $f(X)$ と同一視することができる．同様に，$f\colon X \to Y$ が全射ならば，f がひきおこす可逆写像 $\bar{f}\colon X/R_f \to Y$ により，Y を X の商集合 X/R_f と同一視することができる．

次の性質は，簡単なことだが，これから先，よく使うものである．

補題 2.7.3 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ を写像とする．

1. 次の条件について，(1) ⇒ (2) ⇒ (3) がなりたつ．

(1) f と g は単射である．

(2) $g \circ f$ は単射である．

(3) f は単射である．

2. 次の条件について，(1) ⇒ (2) ⇒ (3) がなりたつ．

(1) f と g は全射である．

(2) $g \circ f$ は全射である．

(3) g は全射である． □

証明 1. (1)⇒(2): $x \in X$ に対し，$(g \circ f)^{-1}(g \circ f(x)) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}$ である．

(2)⇒(3): $x \in X$ に対し，$f^{-1}(f(x)) \subset (g \circ f)^{-1}(g \circ f(x)) = \{x\}$ である．

2. (1)⇒(2): $z \in Z$ に対し，$(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) \neq \emptyset$ である．

(2)⇒(3): $z \in Z$ に対し，$g^{-1}(z) \supset f(f^{-1}(g^{-1}(z))) = f((g \circ f)^{-1}(z)) \neq \emptyset$ である． ■

命題 2.7.4　写像 $f\colon X \to Y$ について，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) f は全単射である．

(2) f は可逆である． □

証明　(1)⇒(2): $f\colon X \to Y$ の標準分解を $i \circ \bar{f} \circ q\colon X \to X/R_f \to f(X) \to Y$ とする．f が単射ならば，$q\colon X \to X/R_f$ は可逆であり，f が全射ならば，$i\colon f(X) \to Y$ も可逆である．よってこのとき，$f = i^{-1} \circ \bar{f} \circ q^{-1}$ も可逆である．

(2)⇒(1): $g = f^{-1}$ とする．$\mathrm{id}_X = g \circ f$ は単射だから，f も単射である．$\mathrm{id}_Y = f \circ g$ は全射だから，f も全射である． ■

よりみち 47　可逆な写像は，ふつう全単射とよばれるので，$f\colon X \to Y$ が可逆であることを証明するときには，$f\colon X \to Y$ が全射でありかつ単射であることを示そうと思うことが多い．しかし，実際には，逆写像を構成してしまうほうがわかりやすいことが多い．つまり，逆向きの写像 $g\colon Y \to X$ を定義して，合成 $g \circ f$ が X の恒等写像であることと $f \circ g$ が Y の恒等写像であることを示すということである．

双方向の写像を考えるということから，西欧語では全単射を bijection とよぶ．その訳語として，双射という言葉が全単射の同義語として提案されたが，定着しなかった．単射を中への写像，全射を上への写像とよんでいる本もある．

単射と全射については，次のような特徴づけもある．

命題 2.7.5　$f\colon X \to Y$ を写像とする．

1. 次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) f は単射である．

(2) $g \circ f = \mathrm{id}_X$ をみたす写像 $g\colon Y \to X$ が存在するかまたは，$X = \emptyset$ で

ある．

2. 次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) f は全射である．

(2) $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ をみたす写像 $g\colon Y \to X$ が存在する． □

証明 1. (1)⇒(2): X が空集合でないとし，$a \in X$ とする．写像 $g\colon Y \to X$ を，$y \in f(X)$ なら $g(y)$ を $f^{-1}(y)$ のただ 1 つの元とし，$y \in Y \setminus f(X)$ なら $g(y) = a$ とおくことで定める．$x \in X$ に対し $g(f(x)) = x$ だから，$g \circ f = \mathrm{id}_X$ である．

(2)⇒(1): $g \circ f = \mathrm{id}_X$ ならば，補題 2.7.3.1. (2)⇒(3) より，f は単射である．X が空集合ならば，空集合からのただ 1 つの写像 $f\colon \emptyset \to Y$ は単射である．

2. (1)⇒(2)$^{\mathrm{AC}}$: 任意の $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ だから，選択公理より，$\prod_{y\in Y} f^{-1}(y) \neq \emptyset$ である．$(x_y) \in \prod_{y\in Y} f^{-1}(y) \neq \emptyset$ とし，写像 $g\colon Y \to X$ を，$g(y) = x_y$ で定める．任意の $y \in Y$ に対し，$g(y) = x_y \in f^{-1}(y)$ だから $f(g(y)) = y$ である．よって，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ である．

(2)⇒(1): $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ ならば，補題 2.7.3.2. (2)⇒(3) より，f は全射である． ■

まとめ

・単射とは，可逆写像と包含写像の合成のことであり，全射とは，商写像と可逆写像の合成のことである．

・可逆写像とは，全単射のことである．

問題

AP 2.7.1 X と Y を集合とする．全射 $f\colon X \to Y$ に対し，分割 $(f^{-1}(y))_{y\in Y}$ を対応させる写像

$$\{f \in \mathrm{Map}(X,Y) \mid f \text{ は全射}\} \longrightarrow \{(X_y)_{y\in Y} \in \mathrm{Map}(Y, P(X)) \mid (X_y)_{y\in Y} \text{ は } X \text{ の分割である}\}$$

は，可逆であることを示せ．

AP 2.7.2　命題 2.7.5.2. (1)⇒(2) から，選択公理を導け．

AP 2.7.3　$f\colon X \to Y$ を写像とする．次の条件 (1)–(3) は同値であることを示せ．

(1) f は単射である．

(2) 任意の部分集合 $A \subset X$ に対し，$f^{-1}(f(A)) = A$ である．

(3) 任意の部分集合 $A_1, A_2 \subset X$ に対し，$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ である．

AP 2.7.4　$f\colon X \to Y$ を写像とする．$f_*\colon P(X) \to P(Y)$ を $A \subset X$ に対し $f_*(A) = f(A)$ で定め，$f^*\colon P(Y) \to P(X)$ を $B \subset Y$ に対し $f^*(B) = f^{-1}(B)$ で定める．

1. 次の条件 (1)–(3) は同値であることを示せ．

(1) f は単射である．

(2) f_* は単射である．

(3) f^* は全射である．

2. 次の条件 (1)–(3) は同値であることを示せ．

(1) f は全射である．

(2) f_* は全射である．

(3) f^* は単射である．

A 2.7.5　$f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ を写像とする．

1. 次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) g は単射であり，$g \circ f$ は全射である．

(2) g は可逆であり，f は全射である．

2. 次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) f は全射であり，$g \circ f$ は単射である．

(2) f は可逆であり，g は単射である．

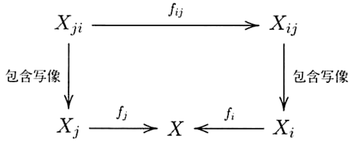
A 2.7.6　X を集合とし，R を X の順序とする．$x, y \in X$ に対し，$R(x, y)$ を $x <_R y$ で表わす．$x \in X$ に対し，$L(x) = \{y \in X \mid y <_R x\}$ とおく．

1. $x, y \in X$ に対し，$x <_R y$ と $L(x) \subset L(y)$ は同値であることを示せ．

2. $x \in X$ を $L(x) \in P(X)$ にうつす写像 $L\colon X \to P(X)$ は単射であることを示せ．

BP 2.7.7　$(X_i)_{i \in I}$ を集合の族とする．各 $i \in I$ に対し，$(X_{ij})_{j \in I}$ を X_i の部分集合の族とする．$(f_{ij})_{(i,j) \in I \times I}$ を，可逆写像 $f_{ij}\colon X_{ji} \to X_{ij}$ の族とする．次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) 集合 X と単射の族 $(f_i\colon X_i \to X; i \in I)$ で，次の条件をみたすものが存在する：$(f_i(X_i))_{i \in I}$ は X の被覆である．任意の $i, j \in I$ に対し，図式

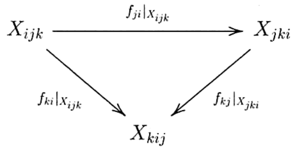


は可換であり，$f_i(X_i) \cap f_j(X_j) = f_i(X_{ij}) = f_j(X_{ji})$ である．

(2) 次の条件 (i) と (ii) がなりたつ．

(i) 任意の $i \in I$ に対し，$X_{ii} = X_i$ である．

(ii) 任意の $i, j, k \in I$ に対し，$X_{ijk} = X_{ij} \cap X_{ik}$ とおくと，$f_{ji}(X_{ijk}) = X_{jik}$ であり，図式



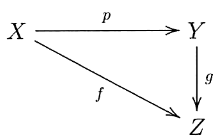
は可換である．

よりみち 48　問題 2.7.7 の条件 (1) をみたす X を $(X_i)_{i\in I}$ の $(f_{ij})_{i,j\in I}$ による**はりあわせ** (patching) とよぶ．問題 2.7.7 の条件 (2) を，**はりあわせの条件**という．

2.8　ひきおこされる写像

$i\colon X \to Y$ が単射なら，定義域 X への写像について，次の性質がなりたつ．$i\colon X \to Y$ を単射とし，T を集合とする．写像 $f\colon T \to Y$ について，$f = i \circ g$ をみたす写像 $g\colon T \to X$ が存在するための条件は，$f(T) \subset i(X)$ である．さらに，$f(T) \subset i(X)$ のとき，$f = i \circ g$ をみたす写像 $g\colon T \to X$ はただ 1 つである．

全射について，これと双対的な条件を考える．$p\colon X \to Y$ を全射，$f\colon X \to Z$ を写像として，図式



を可換にする写像 $g\colon Y \to Z$ が存在するための条件を与える．

いくつか用語を復習しておく．写像 p が定める同値関係 R_p が f が定める同値関係 R_f より細かいとは，任意の $x, x' \in X$ に対し，$p(x) = p(x')$ ならば $f(x) = f(x')$ がなりたつということである．これは，R_f のグラフ $C_f = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}$ が，R_p のグラフ C_p を部分集合として含むということである．R_p が R_f と同値であるとは，任意の $x, x' \in X$ に対し，$p(x) = p(x')$ と $f(x) = f(x')$ が同値であるということである．

命題 2.8.1　X, Y, Z を集合とし，$p\colon X \to Y$ を全射，$f\colon X \to Z$ を写像とする．

1. 次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) $f = g \circ p$ をみたす写像 $g\colon Y \to Z$ が存在する．

(2) 写像 p が定める同値関係 R_p が f が定める同値関係 R_f より細かい．

2. R_p が R_f より細かいとする．このとき，$f = g \circ p$ をみたす写像 $g\colon Y \to Z$ はただ 1 つである．

3. R_p が R_f より細かいとする．次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) $f = g \circ p$ をみたす写像 $g\colon Y \to Z$ は単射である．

(2) R_p と R_f は同値である．　□

（証明の前に）写像 $g\colon Y \to Z$ が $f = g \circ p$ をみたすとは，任意の $x \in X$ に対し $p(x)$ を $f(x)$ にうつすということである．p は全射だから，そのような写像 g があるとすると，g のグラフは，$\Gamma = \{(p(x), f(x)) \mid x \in X\} \subset Y \times Z$ でなくてはいけない．これが，実際に写像のグラフであることを確かめることが，証明の要点である．

証明　1. (2)⇒(1): 写像 $(p, f)\colon X \to Y \times Z$ の像 $\{(p(x), f(x)) \mid x \in X\} \subset Y \times Z$ を，Γ とおく．Γ が写像 $Y \to Z$ のグラフであることを示す．系 2.3.5.1. と命題 2.7.4 より，$\mathrm{pr}_1|_\Gamma\colon \Gamma \to Y$ が全単射であることを示せばよい．$\mathrm{pr}_1|_\Gamma \circ (p, f) = p$ は全射だから，$\mathrm{pr}_1|_\Gamma\colon \Gamma \to Y$ は全射である．$\mathrm{pr}_1|_\Gamma\colon \Gamma \to Y$ が単射であることを示す．$(p(x), f(x)), (p(x'), f(x')) \in \Gamma$ とし，$p(x) = p(x')$ とする．R_p が R_f より細かいという仮定より，$f(x) = f(x')$ であり，$(p(x), f(x)) = (p(x'), f(x'))$ である．よって，$\mathrm{pr}_1|_\Gamma\colon \Gamma \to Y$ は単射である．したがって，$\mathrm{pr}_1|_\Gamma\colon \Gamma \to Y$ は全単射であり，$\Gamma = \Gamma_g$ となる写像

$g\colon Y \to Z$ が定まる．

$x \in X$ とすると，$(p(x), f(x)) \in \Gamma_g$ だから，$g(p(x)) = f(x)$ である．よって，$f = g \circ p$ である．

(1)⇒(2): $f = g \circ p$ とする．$p(x) = p(x')$ ならば，$f(x) = g(p(x)) = g(p(x')) = f(x')$ である．

2. 写像 $g\colon Y \to Z$ が $f = g \circ p$ をみたすとする．$y \in Y$ とし，$y = p(x), x \in X$ とすると，$g(y) = g(p(x)) = f(x)$ である．よって，$f = g \circ p$ をみたす g はただ 1 つである．

3. (2)⇒(1): p の標準分解は可逆写像 $\bar{p}\colon X/R_p \to Y$ を定め，f の標準分解は単射 $\bar{f}\colon X/R_f \to Z$ を定める．R_p が R_f と同値なら，$X/R_p = X/R_f$ である．$q\colon X \to X/R_p = X/R_f$ を商写像とし，$g\colon Y \to Z$ を合成写像 $\bar{f} \circ \bar{p}^{-1}$ とすると，$f = (\bar{f} \circ \bar{p}^{-1}) \circ (\bar{p} \circ q)$ である．よって，$g = \bar{f} \circ \bar{p}^{-1}$ は f がひきおこす写像であり，単射である．

(1)⇒(2): g が単射ならば，$p(x) = p(x')$ は $f(x) = g(p(x)) = g(p(x')) = f(x')$ と同値である． ■

定義 2.8.2 $p\colon X \to Y$ を集合の全射とし，$f\colon X \to Z$ を写像とする．p が定める同値関係 R_p が f が定める同値関係 R_f より細かいとき，$y \in Y$ に対し，$f(x)$ は $y = p(x)$ をみたす $x \in X$ の**とり方によらない** (independent of the choice) という．このとき，$f = g \circ p$ をみたす写像 $g\colon Y \to Z$ は **well-defined** であるという．g を $f\colon X \to Z$ によって**ひきおこされた写像** (induced mapping) という． □

よりみち 49 well-defined とは，「ちゃんと定義されている」という意味である．英語をそのまま使う習慣になっているので，この本でもそれにしたがう．$p\colon X \to Y$ が全射ならば，$f = g \circ p$ をみたす写像 $g\colon Y \to Z$ を定めようとすれば，$y \in Y$ に対し，$y = p(x)$ をみたす $x \in X$ をとり，$g(y) = f(x)$ とおくしかない．g が well-defined であるとは，こうすることにより，実際に写像 $g\colon Y \to Z$ を定めることができるということである．

系 2.8.3 R を集合 X の同値関係とし，$q\colon X \to X/R$ を商写像とする．

1. 写像 $f\colon X \to Y$ について，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) $f = g \circ q$ をみたす写像 $g\colon X/R \to Y$ が存在する.

(2) R は f が定める同値関係 R_f より細かい.

さらに，R が R_f より細かいならば，$f = g \circ q$ をみたす写像 $g\colon X/R \to Y$ はただ 1 つである.

2. R' を Y の同値関係とし，$q'\colon Y \to Y/R'$ を商写像とする. 写像 $f\colon X \to Y$ に対し，次の条件 (1) と (2) は同値である.

(1) 写像 $g\colon X/R \to Y/R'$ で，図式

$$
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\ f\ } & Y \\
{\scriptstyle q}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q'} \\
X/R & \xrightarrow[\ g\ ]{} & Y/R'
\end{array}
$$

を可換にするものが存在する.

(2) $C \subset X \times X$ を R のグラフとし C' を R' のグラフとすると，$C \subset (f \times f)^{-1}(C')$ である. □

証明　1. 命題 2.8.1.1. と 2. を，商写像 $q\colon X \to X/R$ に適用すればよい.

2. 合成写像 $q' \circ f\colon X \to Y/R'$ が定める同値関係のグラフは $(f \times f)^{-1}(C')$ だから，1. を $q' \circ f$ に適用すればよい. ■

系 2.8.3.1. を**商集合の普遍性**という. このとき g を f によってひきおこされた写像という.

【例 2.8.4】　m が n の約数であるとき，$\mathbb{Z}$ の恒等写像は，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ をひきおこす.

> まとめ
> ・写像が，全射によって分解されるための条件を与えた.

問題

A 2.8.1　$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とする. 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，次の条件 (1) と (2) は同値であることを，命題 2.8.1 を使って示せ.

(1) 関数 $g\colon S^1 \to \mathbb{R}$ で，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $f(t) = g(\cos t, \sin t)$ をみたすものが存在する．

(2) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $f(t + 2\pi) = f(t)$ がなりたつ．

A 2.8.2　$\mathbb{R}$ の同値関係を $x - y \in \mathbb{Z}$ で定め，商集合を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ で表わす．

1. 実数 $a \in \mathbb{R}$ に対し，a 倍写像 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が，写像 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ をひきおこすための a の条件を求めよ．

2. a を 1. の条件をみたす実数とし，$g_a\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ をひきおこされた写像とする．$x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対し，集合 $g_a^{-1}(x)$ の元の個数を求めよ．

A 2.8.3　$x, y \in \mathbb{R}^2$ に対し $x - y \in \mathbb{Z}^2$ で定まる $\mathbb{R}^2$ の同値関係 R による商集合を，$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ で表わし，$q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を商写像とする．

1. $\mathbb{R}^3$ の元を列ベクトルで表わし，写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(s,t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi s & -\sin 2\pi s & 0 \\ \sin 2\pi s & \cos 2\pi s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\pi t + 2 \\ 0 \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix}$$

で定める．写像 $g\colon \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^3$ で，$f = g \circ q$ をみたすものが，ただ 1 つ存在することを示せ．

g は単射であることも示せ．

2. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ を整数とし，写像 $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，$h(s,t) = (as + bt,\ cs + dt)$ で定める．写像 $\bar{h}\colon \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ で，$\bar{h} \circ q = q \circ h$ をみたすものが，ただ 1 つ存在することを示せ．

$ad - bc = 1$ ならば，$\bar{h}$ は可逆であることも示せ．

AP 2.8.4　次のようにして系 2.8.3.1. (2)⇒(1) の別証を与えよ．

$f\colon X \to Y$ を写像とし，R を X の同値関係とする．$q\colon X \to X/R$ を商写像とする．R が，f が定める同値関係 R_f よりも細かいと仮定する．

1. 単射 $i\colon Y \to P(Y)$ を $i(y) = \{y\}$ で定め，$f_*\colon P(X) \to P(Y)$ を $A \in P(X)$ を $f(A) \in P(Y)$ にうつす写像とする．図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ f\ } & Y \\ {\scriptstyle q}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i} \\ P(X) & \xrightarrow{\ f_*\ } & P(Y) \end{array}$$

は可換であることを示せ．

2. $f_*(X/R) \subset i(Y)$ を示せ．f_* の制限 $X/R \to i(Y)$ と，i が定める可逆写像 $Y \to i(Y)$ の逆写像 $i(Y) \to Y$ の合成を $g\colon X/R \to Y$ とすると，$f = g \circ q$ であることを示せ．

BP 2.8.5　X を集合とし，$(X_i)_{i\in I}$ を X の被覆とする．Y を集合とし，$(f_i)_{i\in I}$ を，写像 $f_i\colon X_i \to Y$ の族とする．

1. 次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) 写像 $f\colon X \to Y$ で，任意の $i \in I$ に対し $f|_{X_i} = f_i$ をみたすものが存在する．

(2) 任意の $i, j \in I$ に対し $f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}$ である．

2. (1) の条件をみたす写像 $f\colon X \to Y$ は，一意的であることを示せ．

よりみち 50　問題 2.8.5.1.(2) の条件を，**はりあわせの条件**という．

2.9　空集合から有理数まで *

この節では，$0 = \emptyset$ からはじめて，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$, 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$, 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ の，集合論的な構成法を説明する．証明はすべて省略する．また，これから説明するものが，唯一の構成法であるわけではない．

自然数は，次の条件 (1)–(3) をみたすものとして定義される．

(1) 0 は自然数である．

(2) n が自然数ならば，$n + 1$ も自然数である．

(3) このようにしてつくられるものだけが自然数である．

これを形式化することで，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を定義する．(1) と (2) は，次のようになる．

(1) $\emptyset \in \mathbb{N}$

(2) $\forall n (n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \cup \{n\} \in \mathbb{N})$

(3) の意味は，$\mathbb{N}$ は (1) と (2) をみたす集合のうちで最小のものであると解釈して，次のように形式化する．

(3) $\forall A ((A \subset \mathbb{N} \land \emptyset \in A \land \forall n (n \in A \Rightarrow n \cup \{n\} \in A)) \Rightarrow A = \mathbb{N})$.

自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は，条件 (1)–(3) をみたすただ 1 つの集合として定義される．条件 (3) は，次のように，**数学的帰納法** (mathematical induction) を表わしている．$P(n)$ を自然数 n についての条件とし，$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$ とおく．条件 (3) によれば，$0 \in A$ かつ $\forall n \in \mathbb{N} (n \in A \Rightarrow n + 1 \in A)$ がみたされるなら，$A = \mathbb{N}$ である．これは $P(0)$ かつ $\forall n \in \mathbb{N} (P(n) \Rightarrow P(n+1))$ がなりたつならば，すべての自然数 n に対し $P(n)$ がなりたつということを表わしている．

数学的帰納法の応用に，点列の**帰納的** (recursive) な定義がある．$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を

集合の列とする．$a_0 \in X_0$ とし，任意の自然数 $n \geq 0$ に対し $a_0 \in X_0, \ldots, a_n \in X_n$ まで定まったときに $a_{n+1} \in X_{n+1}$ を定めることができるとすると，列 $a = (a_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ を定義することができる．このことは，下のように定式化し証明することができる．

命題 2.9.1 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を集合の列とし，$c \in X_0$ とする．

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を写像 $f_n\colon X_0 \times \cdots \times X_n \to X_{n+1}$ の族とする．このとき，列 $(a_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ で，$a_0 = c$ かつ任意の自然数 $n \geq 0$ に対し $a_{n+1} = f_n(a_0, \ldots, a_n)$ をみたすものが，ただ 1 つ存在する．

2.[AC] $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を写像 $F_n\colon X_0 \times \cdots \times X_n \to P(X_{n+1}) \setminus \{\emptyset\}$ の族とする．このとき，列 $(a_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ で，$a_0 = c$ かつ任意の自然数 $n \geq 0$ に対し $a_{n+1} \in F_n(a_0, \ldots, a_n)$ をみたすものが存在する． □

証明 1. 部分集合 $S_n \subset X_0 \times \cdots \times X_n$ の族 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$S_n = \left\{ (x_0, \ldots, x_n) \in X_0 \times \cdots \times X_n \;\middle|\; \begin{array}{l} x_0 = c \text{ であり，任意の自} \\ \text{然数 } 0 \leq m < n \text{ に対し} \\ x_{m+1} = f_m(x_0, \ldots, x_m) \end{array} \right\}$$

で定める．n に関する帰納法により，任意の自然数 $n \geq 0$ に対し $S_n = \{s_n\}$ をみたす $s_n \in S_n$ が存在することを示す．$n = 0$ のときは $S_0 = \{c\}$ である．自然数 $m \geq n$ に対し，写像 $p_{n,m}\colon X_0 \times \cdots \times X_m \to X_0 \times \cdots \times X_n$ を，$p_{n,m}(x_0, \ldots, x_m) = (x_0, \ldots, x_n)$ で定める．$p_{n,m}(S_m) \subset S_n$ だから，$S_n = \{s_n\}$ ならば，$S_{n+1} = \{(s_n, f_n(s_n))\}$ である．よって，任意の自然数 $n \geq 0$ に対し $S_n = \{s_n\}$ をみたす $s_n \in S_n$ が存在することが，n に関する帰納法により示された．

$(s_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} S_n$ をただ 1 つの元とし，$(a_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ を $a_n = \mathrm{pr}_n(s_n)$ で定める．$a_0 = s_0 = c$ である．$m \leq n$ ならば，$\mathrm{pr}_m(s_n) = \mathrm{pr}_m(p_{m,n}(s_n)) = \mathrm{pr}_m(s_m) = a_m$ だから，任意の $n \geq 0$ に対し $s_n = (a_0, \ldots, a_n)$ である．よって，任意の $n \geq 0$ に対し，$s_{n+1} = (a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in S_{n+1}$ だから，$a_{n+1} = f_n(a_0, \ldots, a_n)$ である．条件をみたす (a_n) の一意性を示すには，(a_n) と (b_n) が条件をみたすと仮定して，任意の自然数 $n \geq 0$ に対して $a_n = b_n$ であることを，n に関する帰納法で示せばよい．詳細は省略する．

2. 選択公理より，任意の集合 X に対し，$\prod_{A\in P(X)\setminus\{\emptyset\}} A \neq \emptyset$ である．よって，写像 $g\colon P(X)\setminus\{\emptyset\} \to X$ で，空でない任意の部分集合 $A \subset X$ に対し $g(A) \in A$ をみたすものが存在する．したがって，さらに選択公理より，写像 $g_n\colon P(X_n)\setminus\{\emptyset\} \to X_n$ の族 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，任意の自然数 $n \geq 0$ と空でない任意の部分集合 $A \subset X_n$ に対し $g_n(A) \in A$ をみたすものが存在する．写像 $f_n\colon X_0 \times \cdots \times X_n \to X_{n+1}$ の族 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，$f_n = g_{n+1} \circ F_n$ で定める．1. より，列 $(a_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ で，$a_0 = c$ かつ任意の自然数 $n \geq 0$ に対し $a_{n+1} = f_n(a_0, \ldots, a_n)$ をみたすものが存在する．任意の自然数 $n \geq 0$ に対し，$a_{n+1} = f_n(a_0, \ldots, a_n) = g_{n+1}(F_n(a_0, \ldots, a_n)) \in F_n(a_0, \ldots, a_n)$ である． ■

空でない任意の部分集合 $A \subset X$ に対し $g(A) \in A$ をみたす写像 $g\colon P(X)\setminus\{\emptyset\} \to X$ を，**選択関数** (choice function) とよぶ．

自然数の加法と乗法は，

$$m + 0 = m, \quad m + (n+1) = (m+n) + 1,$$
$$m \cdot 0 = 0, \quad m \cdot (n+1) = (m \cdot n) + m$$

により，n に関して帰納的に定義される．自然数の大小関係 $m \leq n$ は，包含関係 $m \subset n$ のこととして定義される．

整数 (integer) 全体の集合 $\mathbb{Z}$ を定義する．$\mathbb{N}^2$ の同値関係 $\sim$ を，$(n, m) \sim (n', m')$ とは $n + m' = n' + m$ のことであるとして定義する．整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を，商集合 $\mathbb{N}^2/\sim$ として定義する．同値類 $\overline{(n, m)}$ を $n - m$ で表わす．$Z = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n = 0$ または $m = 0\}$ は完全代表系である．単射 $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}\colon n \mapsto n - 0$ により，$\mathbb{N}$ を $\mathbb{Z}$ の部分集合と同一視する．$0 - n$ を $-n$ で表わす．

整数の加法と乗法は

$$(n - m) + (n' - m') = (n + n') - (m + m'),$$
$$(n - m) \cdot (n' - m') = (nn' + mm') - (mn' + nm')$$

で定義する．大小関係 $n - m \leq n' - m'$ は，$n + m' \leq n' + m$ のことと定義する．$n \in \mathbb{N}$ のとき，$n, -n$ の**絶対値** (absolute value) $|n|, |-n|$ を n と定める．

有理数 (rational number) 全体の集合 $\mathbb{Q}$ を定義する．$\{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \mid m>0\}$ の同値関係 $\sim$ を，$(n,m)\sim(n',m')$ とは $nm'=n'm$ のことであるとして定義する．有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を，商集合 $\{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \mid m>0\}/\sim$ として定義する．同値類 $\overline{(n,m)}$ を $\frac{n}{m}$ で表わす．$Q=\{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \mid m>0$ かつ n と m はたがいに素$\}$ は完全代表系である．標準全射 $p\colon \{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \mid m>0\}\to\mathbb{Q}$ の Q への制限 $p|_Q$ の逆写像 $p|_Q^{-1}\colon \mathbb{Q}\to Q$ は，有理数に対し，その既約分数表示の分子と分母の対を対応させる写像である．単射 $\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}: n\mapsto\frac{n}{1}$ により，$\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Q}$ の部分集合と同一視する．

有理数の加法と乗法は

$$\frac{n}{m}+\frac{n'}{m'}=\frac{nm'+mn'}{mm'},\qquad \frac{n}{m}\cdot\frac{n'}{m'}=\frac{nn'}{mm'}$$

で定義する．大小関係 $\frac{n}{m}\leq\frac{n'}{m'}$ は，$nm'\leq n'm$ のことと定義する．絶対値は $\left|\frac{n}{m}\right|=\frac{|n|}{m}$ で定める．

まとめ

・空集合から出発して，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$, 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$, 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を構成した．

問題

A 2.9.1　自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対し，写像 $f_n\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ を，$f_n(a)=na$ で定める．

1. f_n が単射であるための条件を求めよ．
2. f_n が全射であるための条件を求めよ．

第3章 実数と位相

次章で一般の位相空間を扱うが，その前にこの章では，位相の用語に慣れるために，まず n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の位相を考える．

はじめに，3.1 節で，有理数の切断として実数を定義し，実数の連続性を証明する．

3.2 節で，$\mathbb{R}^n$ の開集合などの位相についての用語を導入する．$\mathbb{R}^n$ の点列の収束も，開集合を使って記述できることを示す．3.3 節では，$\mathbb{R}^n$ の開集合上で定義された，実数値関数の連続性を定義し，これも，開集合を使って記述できることを示す．最大値の定理や中間値の定理などの，実数の連続性から導かれる $\mathbb{R}^n$ の重要な位相的性質については，第 6 章で改めて扱う．

3.4 節では，行列からなる集合の重要な例を紹介する．

3.1 実数の定義と連続性 *

有理数の切断として，実数を定義する．

定義 3.1.1 1. $\mathbb{Q}$ の部分集合 L が，次の条件 (1)–(3) をみたすとき，L は**デデキントの切断** (Dedekind's cut) であるという．

(1) $\emptyset \subsetneqq L \subsetneqq \mathbb{Q}$ である．

(2) $x \in L$ かつ $y \leq x$ ならば，$y \in L$ である．

(3) $x \in L$ ならば，$x < y$ をみたす $y \in L$ がある．

2. デデキントの切断を**実数** (real number) とよび，実数全体の集合 $\{L \in P(\mathbb{Q}) \mid L \text{ は切断 }\}$ を $\mathbb{R}$ で表わす．

3. L, M を実数とする．$L \subset M$ を $L \leq M$ で表わし，$L \subsetneqq M$ を $L < M$ で表わす． □

命題 3.1.2　1. r が有理数ならば，$L(r) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$ は切断である．

2. 有理数 r と実数 L に対し，次の条件 (1)–(3) はすべて同値である．

(1) $r \in L$.

(2) $L(r) < L$.

(3) $L \not\leq L(r)$. □

証明　1. $r - 1 \in L(r)$, $r \notin L(r)$ だから $\emptyset \subsetneqq L(r) \subsetneqq \mathbb{Q}$ である．$y \leq x < r$ なら $y < r$ であり，$x < r$ なら $x < \frac{x+r}{2} < r$ だから，$L(r)$ は切断の条件 (2) と (3) もみたす．

2. (1)⇒(2): $r \in L$ とすると，切断の条件 (2) より，$x < r$ ならば $x \in L$ である．よって，$L(r) \subset L$ である．$r \notin L(r)$ だから，$L(r) \subsetneqq L$ である．

(2)⇒(3): $L(r) \subsetneqq L$ ならば，$L \not\subset L(r)$ である．

(3)⇒(1): $x \in L$, $x \notin L(r)$ とする．$r \leq x$ だから，切断の条件 (2) より，$r \in L$ である． ■

系 3.1.3　1. r, s を有理数とする．$L(r) < L(s)$ は $r < s$ と同値である．

2. L, M を実数とする．$L \leq M$ か $M \leq L$ のどちらかがなりたつ．$L < M$ ならば，$L < L(s) < M$ をみたす有理数 $s \in \mathbb{Q}$ が存在する． □

証明　1. 命題 3.1.2.2. より，$L(r) < L(s)$ は $r \in L(s)$ と同値であり，$r < s$ と同値である．

2. $M \subset L$ でなければ，$L \subset M$ であることを示す．$M \subset L$ でないとすると，有理数 $r \notin L$, $r \in M$ が存在する．命題 3.1.2.2. より，$L \leq L(r) < M$ である．

$r \in M \setminus L$ とする．命題 3.1.2.2. より，$L \leq L(r) < M$ である．$r \in M$ だから，切断の条件 (3) より，有理数 $s \in M, r < s$ が存在する．このとき，$L \leq L(r) < L(s) < M$ である． ■

系 3.1.3.1. より，有理数 $r \in \mathbb{Q}$ を切断 $L(r) \in \mathbb{R}$ にうつす写像 $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ は，単射である．この単射により，$\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合と同一視する．

よりみち 51　有理数を実数と考えるときは，$r \in \mathbb{Q}$ を r が定める切断

$L(r) \subset \mathbb{Q}$ と同一視している．混乱しやすいところなので，注意する必要がある．切断 $L(r)$ と有理数 r を同一視すれば，命題 3.1.2.2. より，実数 $L \in \mathbb{R}$ は，$L = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < L\}$ として定義されている．

これからしばらく，定理 3.1.5 の証明までは，実数を大文字で，有理数を小文字で，区別して表わす．

実数 $L, M \in \mathbb{R}$ の和を

$$L + M = \{x + y \mid x \in L, y \in M\}$$

で定める．$L' = \{x \in \mathbb{Q} \mid \text{任意の } y \in L \text{ に対し } x + y < 0\}$ とおき，

$$-L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < y \text{ をみたす } y \in L' \text{ が存在する }\}$$

とおくと，$-L$ は切断であり，$L+(-L) = (-L)+L = L(0)$ である．$L \geq L(0)$ と $-L \leq L(0)$ は同値である．積を，$L > L(0), M > L(0)$ に対し，

$$L \cdot M = (-L) \cdot (-M) = \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \begin{array}{l} x < yz \text{ をみたす } y \in L, y > 0 \text{ と} \\ z \in M, z > 0 \text{ が存在する} \end{array} \right\}$$

で定義し，$(-L) \cdot M = L \cdot (-M) = -(L \cdot M)$ と定める．$L = L(0)$ または $M = L(0)$ のときは $LM = L(0)$ と定義する．ここで定義した加法と乗法により $\mathbb{R}$ が体（たい）であることの証明は，省略する．

A を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．実数 M が，任意の $L \in A$ に対し $L \leq M$ をみたすとき，M は A の **上界**（じょうかい） (upper bound) であるという．$B = \{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ は } A \text{ の上界 }\}$ が空でないとき，A は**上に有界** (bounded above) であるという．A が上に有界であるとき，B の最小元を，A の**上限** (supremum) といい $\sup A$ や $\sup\limits_{L \in A} L$ で表わす．$\sup A \in A$ であるとき，$\sup A$ は A の**最大元** (maximum) max A である．**下界**（かかい） (lower bound) や**下限** (infimum) $\inf A$ についても同様に定義する．上にも下にも有界であるとき，単に**有界** (bounded) であるという．

命題 3.1.4　A を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする．実数 S に対し，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) S は A の上限である．

(2) 任意の $L \in A$ に対し $L \leq S$ である．任意の実数 $T < S$ に対し，A の元 L で $T < L$ をみたすものが存在する． □

証明 S が A の上限であるとは，S が A の上界でありしかも任意の実数 $T < S$ は A の上界でないということである．S が A の上界であるとは，任意の $L \in A$ に対し $L \leq S$ であるということである．T が A の上界でないとは，$T < L$ をみたす $L \in A$ が存在するということである．よって，(1) と (2) は同値である． ■

実数についての次の性質を，実数の連続性という．

定理 3.1.5 (**実数の連続性** (continuity)) A を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．$A \neq \emptyset$ かつ A が上に有界ならば，A の上限が存在する． □

証明 $S = \bigcup_{L \in A} L \subset \mathbb{Q}$ とする．S が切断であることを示す．$L \in A$ とすると，$\emptyset \neq L \subset S$ である．$M \in \mathbb{R}$ を A の上界とすると，任意の $L \in A$ に対し，$L \subset M$ だから，$S = \bigcup_{L \in A} L \subset M \subsetneqq \mathbb{Q}$ である．

有理数 $x, y \in \mathbb{Q}$ が $x \in S$ かつ $y < x$ をみたすとすると，$x \in L$ をみたす $L \in A$ があるから，$y \in L \subset S$ である．$x \in S$ とすると，$x \in L$ をみたす $L \in A$ があるから，$x < y$ をみたす $y \in L \subset S$ がある．よって，S は切断である．

S が A の上限であることを示す．任意の $L \in A$ に対し，$L \subset S$ であり $L \leq S$ である．よって，S は L の上界である．M を A の任意の上界とすると，上で示したように，$S = \bigcup_{L \in A} L \subset M$ であり $S \leq M$ である．よって，S は A の上限である． ■

ここからは，実数と有理数を区別せず，どちらも小文字で表わす．$r \in \mathbb{Q}$ と $L(r) \in \mathbb{R}$ を同一視し，$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ と考える．

$\mathbb{R}$ を**数直線** (numerical line) ともいう．実数 $a \leq b$ に対し，$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ を**開区間** (open interval) といい，(a, b) で表わす．$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ を**閉区間** (closed interval) といい，$[a, b]$ で表わす．半開区間 $(a, b], [a, b)$ もそ

れぞれ $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ と $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ で定義される．$a = b$ のときは $(a,a) = (a,a] = [a,a) = \emptyset$ であり，$[a,a] = \{a\}$ である．

よりみち 52　開区間を表わす記号 (a,b) は順序対とまぎらわしいが，慣用の記号である．a, b が実数ならば，開区間 (a,b) は $\mathbb{R}$ の部分集合であり，順序対 (a,b) は $\mathbb{R}^2$ の点なので，たいていは文脈からどちらであるかわかる．

$a \in \mathbb{R}$ に対し，$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, [a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, (-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ も定義される．$\mathbb{R}$ を $(-\infty,\infty)$ で表わすこともある．

$\mathbb{R}$ の任意の部分集合に，その上限と下限が定義できると便利である．そのため，$\mathbb{R}$ に 2 点 $\infty \neq -\infty$ を付け加えて，$[-\infty,\infty] = \mathbb{R} \amalg \{-\infty,\infty\}$ とおく．A を $[-\infty,\infty]$ の部分集合とし，$B = A \cap \mathbb{R}$ とおく．A の上限 $\sup A \in [-\infty,\infty]$ を

$$\sup A = \begin{cases} \sup B & \infty \notin A \text{ かつ，} B \neq \emptyset \text{ で } B \text{ が上に有界なとき，} \\ \infty & \infty \in A \text{ かまたは，} B \text{ が上に有界でないとき，} \\ -\infty & A \subset \{-\infty\} \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する．A の下限 $\inf A \in [-\infty,\infty]$ も同様に定義する．∞ のかわりに $+\infty$ と書くこともある．

a が実数であるとき，$[a,\infty] = [a,\infty) \amalg \{\infty\} \subset [-\infty,\infty]$ とおく．$[a,\infty]$ の任意の部分集合 A に対しても，上限 $\sup A$ と下限 $\inf A$ が，$[a,\infty]$ の元として，同様に定義される．$A = \emptyset$ のときは，$\sup A = a, \inf A = \infty$ である．$\sup A = a$ は，a に依存することに注意が必要である．

$f\colon X \to \mathbb{R}$ が写像であるとき，上限 $\sup f(X)$ を $\sup_{x \in X} f(x)$ と書くことも多い．添字 $x \in X$ の部分を，それと同値な条件で書くことも多い．下限についても同様である．写像 $f\colon X \to \mathbb{R} \amalg \{\pm\infty\}$ についても同様である．

実数列の収束を定義する．

定義 3.1.6　(x_n) を実数列とし，$a \in \mathbb{R}$ とする．

$$\inf_{m \geq 0} \left(\sup_{n \geq m} |x_n - a| \right) = 0$$

であるとき，数列 (x_n) は a に**収束** (converge) するという．n が限りなく大きくなるとき x_n は a に限りなく近づくともいう．このとき，a は数列 (x_n) の**極限** (limit) であるといい，$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ と書く．

集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $\mathbb{R}$ の有界な部分集合であるとき，数列 (x_n) は**有界**であるという． □

よりみち 53　収束する数列 (x_n) の各項 x_n を極限 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ の近似値と考えると，上限 $\sup_{n\geq m} |x_n - a|$ は，n が m 以上のときの誤差の範囲を表わしている．数列が収束するとは，誤差の範囲がいくらでも小さくできるということであり，その下限が 0 ということである．極限や ε-δ 論法については，3.3 節で関数の極限を扱うときに，あらためてくわしく解説する．

命題 3.1.7　(x_n) を実数列とする．

1. 次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ である．

(2) 任意の実数 $r > 0$ に対し，自然数 m で，任意の自然数 $n \geq m$ に対し $|x_n - a| < r$ をみたすものが存在する．

2. (x_n) が収束するならば，(x_n) は有界である．

3. (x_n) は有界かつ単調増加であるとする．$s = \sup_{n\geq 0} x_n$ とすると，$\lim_{n\to\infty} x_n = s$ である． □

証明　1. (1)⇒(2): $r > 0$ を任意の実数とする．命題 3.1.4 と同様に，r は $\left\{ \sup_{n\geq m} |x_n - a| \;\middle|\; m \in \mathbb{N} \right\}$ の下界ではないから，$\sup_{n\geq m} |x_n - a| < r$ をみたす自然数 m が存在する．このとき，任意の自然数 $n \geq m$ に対し $|x_n - a| < r$ である．

(2)⇒(1): 任意の自然数 $n \geq m$ に対し $|x_n - a| < r$ ならば，$\sup_{n\geq m} |x_n - a| \leq r$ である．したがって，$\inf_{m\geq 0} \left(\sup_{n\geq m} |x_n - a| \right) \leq r$ である．$r > 0$ は任意だから，$\inf_{m\geq 0} \left(\sup_{n\geq m} |x_n - a| \right) = 0$ である．

2.　$a = \lim_{n\to\infty} x_n$ とする．1. より，自然数 m で，任意の $n \geq m$ に対し $|x_n - a| < 1$ となるものがある．$M = \max(|x_0 - a|, \ldots, |x_{m-1} - a|, 1)$ とお

けば，任意の自然数 n, n' に対し，$|x_n - x_{n'}| \leq |x_n - a| + |x_{n'} - a| \leq 2M$ である．

3. $\displaystyle\inf_{m\geq 0}\left(\sup_{n\geq m}|x_n - s|\right) = \inf_{m\geq 0}(s - x_m) = s - \sup_{m\geq 0} x_m = 0$ である． ■

1.2 節で定めた用語によれば，命題 3.1.7.1. の条件 (2) は，任意の実数 $r > 0$ に対し，n が十分大きければ $|x_n - a| < r$ がなりたつということである．命題 3.1.7.2. の逆はなりたたないが，それに近い性質を命題 8.2.7.2. で示す．

実数は，小数で表わすことができる．$m \geq 2$ を自然数とする．$a = (a_n)$ を，自然数列で，任意の $n \geq 1$ に対し $a_n = 0, 1, \ldots, m-1$ であるものとする．有理数列 (s_n) と (t_n) を $s_n = \displaystyle\sum_{l=0}^{n}\frac{a_l}{m^l}$, $t_n = s_n + \dfrac{1}{m^n}$ で定める．任意の自然数 $n \geq 0$ に対し，$s_n \leq s_{n+1} < t_{n+1} \leq t_n$ である．よって，$t_0 = a_0 + 1$ は，$\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の上界であり，数列 (s_n) は，その上限 $\displaystyle\sup_{n\geq 0} s_n$ に収束する．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{m^n}$ で表わす．$r = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{m^n}$ であるとき，右辺を実数 r の m **進小数展開** (m-adic dicimal expression) という．任意の実数 $r \geq 0$ は，m 進小数展開することができる（問題 3.1.1）．

よりみち 54　実数を切断として定義すれば，$1 = 0.99999\cdots$ である理由は，1 より小さい有理数はすべて $0.99999\cdots$ より小さいからということになる．

複素数 (complex number) 全体の集合 $\mathbb{C}$ を，積集合 $\mathbb{R}^2$ として定義する．$(a, b) \in \mathbb{R}^2$ を複素数と考えるときは $a + b\sqrt{-1}$ と表わす．実数 a を複素数 $a + 0\sqrt{-1}$ と同一視する．複素数の加法と乗法は

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1},$$
$$(a + b\sqrt{-1}) \cdot (c + d\sqrt{-1}) = (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}$$

で定義する．複素数 $x = a + b\sqrt{-1}$ に対し，$a - b\sqrt{-1}$ を x の **共役**（きょうやく） (conjugate) とよび，$\bar{x}$ で表わす．$\sqrt{x\bar{x}}$ を x の絶対値とよぶ．a, b をそれぞれ x の実部，虚部といい，$\mathrm{Re}\, x, \mathrm{Im}\, x$ で表わす．

まとめ

・実数全体の集合 $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ を定義した.

・空でなく上に有界な実数の集合には，上限がある.

問題

A 3.1.1 m を 2 以上の自然数とする．自然数の列の集合 D_m を，$D_m = \{(a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid n \geq 1$ ならば $a_n < m\}$ で定める．写像 $f_m \colon D_m \to [0, \infty)$ を，$f_m((a_n)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{m^n}$ で定める．D_m の部分集合 E_m を，$E_m = \{(a_n) \in D_m \mid a_n \neq m-1$ となる自然数 n は有限個 $\}$ と定め，$D_m^* = D_m \setminus E_m$ とおく．

1. f_m の D_m^* への制限 $f_m|_{D_m^*} \colon D_m^* \to [0, \infty)$ は可逆であることを示せ.

2. f_m の E_m への制限 $f_m|_{E_m} \colon E_m \to [0, \infty)$ は単射であることを示せ.

3. $a = (a_n) \in E_m$ とする．n_0 を，任意の $n' > n$ に対し $a_{n'} = m - 1$ となる最小の自然数 n とし，数列 $b = (b_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を，

$$b_n = \begin{cases} a_n & n < n_0 \text{ のとき}, \\ a_{n_0} + 1 & n = n_0 \text{ のとき}, \\ 0 & n > n_0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.1}$$

で定める．$b \in D_m^*$ であり，b は $a \neq b$ かつ $f_m(a) = f_m(b)$ となる D_m のただ 1 つの元であることを示せ.

B 3.1.2 $L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r$ かつ $r^2 < 2$ をみたす有理数 r が存在する $\}$ とおく.

1. L は切断であることを示せ.

2. $1 < L < 2$ であることを示せ.

3. $L^2 = 2$ を示せ.

BP 3.1.3 実数の連続性から，次の性質を導け：

任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ に対し，$a \leq n$ をみたす自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在する.

よりみち 55 問題 3.1.3 の性質を，実数の**アルキメデス性** (Archimedean property) という.

B 3.1.4 1. 実数列 (a_n) に対し，次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ.

(1) 数列 (a_n) は収束する.

(2) 任意の自然数 $N \geq 1$ に対し，有理数 r_N で，集合 $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - r_N| \geq \frac{1}{N}\}$ は有限集合であるものが存在する.

2. 有理数列全体の集合 $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ の部分集合 C を,

$$C = \{(a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid (a_n) \text{ は 1. の条件 (2) をみたす }\}$$

で定める. 数列 $(a_n) \in C$ をその極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ にうつす写像 $l\colon C \to \mathbb{R}$ は, 全射であることを示せ.

よりみち 56　問題 3.1.4.2. の全射 $l\colon C \to \mathbb{R}$ が定める同値関係 R_l を $\sim$ で表わすと, $(a_n) \sim (b_n)$ は, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ と同値である. 全射 $l\colon C \to \mathbb{R}$ は商集合からの可逆写像 $C/R_l \to \mathbb{R}$ を定める. 集合 C とその同値関係 R_l は, 切断による実数の定義を使わずに定められているから, $\mathbb{R}$ を商集合 C/R_l として定義することもできる.

3.2　開集合

この節では, n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ の位相について, 基本的な用語を定義する. $n \geq 0$ を自然数とする. $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \in \mathbb{R}$ を x と y の**標準内積** (standard inner product) という. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ を x の**長さ** (length) という. $\mathbb{R}^n$ 内の 2 点間の距離を定義する.

定義 3.2.1　$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

を, x と y の**距離** (distance) という. □

$\mathbb{R}^n$ にこの距離を考えたものを, **ユークリッド空間** (Euclidean space) とよぶこともある. 距離 $d(x, y)$ は, ベクトルの長さ $\|x - y\|$ である. 距離は次の性質をみたす.

命題 3.2.2　$x, y, z \in \mathbb{R}^n$ に対し, 次の条件 (1)–(3) が成り立つ.

(1) $d(x, y) \geq 0$ である. $d(x, y) = 0$ は $x = y$ と同値である.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ である.

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ である. □

証明 (1) と (2) は簡単だから，(3) だけ証明する．

$a, b \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ を示せばよい．両辺 2 乗して，$\langle a+b, a+b\rangle \leq \langle a, a\rangle + 2\|a\|\|b\| + \langle b, b\rangle$, つまり，$\langle a, b\rangle \leq \|a\|\|b\|$ を示せばよい．さらに両辺 2 乗して，$\langle a, b\rangle^2 \leq \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle$ を示せばよい．任意の実数 t に対し，$\|at+b\|^2 = \langle at+b, at+b\rangle = \langle a, a\rangle t^2 + 2\langle a, b\rangle t + \langle b, b\rangle$ は 0 以上である．したがって，判別式 $\langle a, b\rangle^2 - \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle$ は 0 以下である． ■

(3) の不等式は，3 角形の 2 辺の長さの和は，もう 1 つの辺の長さ以上であるということを表わしているので，**三角不等式** (triangle inequality) とよばれる．

$\mathbb{R}$ の開区間 (a, b) や閉区間 $[a, b]$ の一般化として，$\mathbb{R}^n$ の開集合と閉集合を定義する．

定義 3.2.3 1. $a \in \mathbb{R}^n$ とし，$r > 0$ を実数とする．$U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < r\}$ を，a を中心とする半径 r の**開球** (open ball) という．

2. U を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．任意の $x \in U$ に対し，$U_r(x) \subset U$ をみたす実数 $r > 0$ が存在するとき，U は $\mathbb{R}^n$ の**開集合** (open set) であるという．

3. A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．補集合 $\mathbb{R}^n \setminus A$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとき，A は $\mathbb{R}^n$ の**閉集合** (closed set) であるという．実数の集合 $\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ が有界であるとき，A は**有界**であるという． □

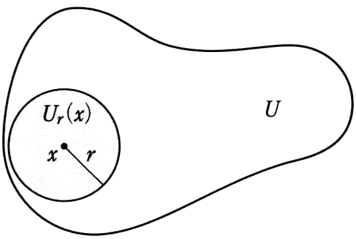


図 3.1 $x \in U_r(x) \subset U$

$U \subset \mathbb{R}^n$ が開集合であるとは，U の任意の点について，その点のまわりの点がすべて U に含まれるということである．U には縁の点がないといっても

よい．

【例 3.2.4】　1. $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は，$\mathbb{R}^n$ の開集合であり，閉集合でもある．この 2 つ以外には，$\mathbb{R}^n$ の開集合でも閉集合でもある部分集合はないことが，$\mathbb{R}^n$ の連結性（例 6.2.2.3.）からわかる．

2. 実数 $a \leq b$ に対し，開区間 (a, b) は $\mathbb{R}$ の開集合であり，閉区間 $[a, b]$ は $\mathbb{R}$ の閉集合である．$a < b$ ならば，半開区間 $[a, b)$ は，$\mathbb{R}$ の開集合でも閉集合でもない．

3. $a \in \mathbb{R}^n$ ならば，$\{a\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である．$n > 0$ ならば，$\{a\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではない．

4. $m < n$ とし，$\mathbb{R}^m$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\{(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \mid (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m\}$ と同一視すると，$\mathbb{R}^m$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合だが，開集合ではない．

次の性質は，開集合の基本的な性質である．4.1 節では，命題 3.2.5 の性質 1. と 2. によって，一般の集合にも位相を定義する．

命題 3.2.5　1. $(U_i)_{i \in I}$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合の族ならば，合併 $\bigcup_{i \in I} U_i$ も $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

2. $(U_i)_{i \in I}$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合の有限族ならば，共通部分 $\bigcap_{i \in I} U_i$ も $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

3. $a \in \mathbb{R}^n$ とし，$r > 0$ を実数とすると，$U_r(a)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．　□

証明　1. $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ とする．$x \in U_j$ をみたす $j \in I$ がある．U_j は $\mathbb{R}^n$ の開集合だから，$U_r(x) \subset U_j$ をみたす実数 $r > 0$ がある．このとき，$x \in U_r(x) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ である．

2. $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ とする．共通部分 $\bigcap_{i \in I} U_i$ は，$m = 0$ なら $\mathbb{R}^n$ であり，$m = 1$ なら U_{i_1} であり，$m \geq 2$ なら $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_m}$ である．

任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し $U_1(x) \subset \mathbb{R}^n$ だから，$\mathbb{R}^n$ は開集合である．m に関する帰納法により，U と V が開集合ならば $U \cap V$ も開集合であることを示せばよい．U と V を開集合とする．$x \in U \cap V$ とすると，$U_r(x) \subset U$ をみたす実数 $r > 0$ と，$U_s(x) \subset V$ をみたす実数 $s > 0$ がある．$t = \min(r, s)$ とすれば，$U_t(x) \subset U \cap V$ である．よって，$U \cap V$ も開集合である．

3. $x \in U_r(a)$ とする．$q = r - d(a, x) > 0$ とおく．$y \in U_q(x)$ とすると，

$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + q = r$ だから，$U_q(x) \subset U_r(a)$ である．よって，$U_r(a)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である． ■

A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とすると，A は，$A = \bigcap_{x\in\mathbb{R}^n\setminus A}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ のように，$\mathbb{R}^n$ の開集合の族 $(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})_{x\in\mathbb{R}^n\setminus A}$ の共通部分として表わすことができる．したがって，命題 3.2.5.2. で，$(U_i)_{i\in I}$ が有限族であるという条件をはずすことはできない．

$\mathbb{R}^n$ の点列の収束を定義し，これも開集合で記述できることを示す．2.1 節で定めた用語と記号にしたがい，写像 $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とよび，$x_m = x(m)$ とおいて，点列 x を (x_m) とも表わす．

定義 3.2.6 (x_m) を $\mathbb{R}^n$ の点列とし，$a \in \mathbb{R}^n$ とする．$\lim_{m\to\infty} d(x_m, a) = 0$ であるとき，点列 (x_m) は a に**収束**するという．m が限りなく大きくなるとき x_m は a に限りなく近づくともいう．このとき，a は点列 (x_m) の**極限**であるといい，$\lim_{m\to\infty} x_m = a$ と書く．

集合 $\{x_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ が $\mathbb{R}^n$ の有界な部分集合であるとき，点列 (x_m) は**有界**であるという． □

命題 3.1.7.2. と同様に，$\mathbb{R}^n$ の点列 (x_m) が収束するならば，(x_m) は有界である．

命題 3.2.7 (x_m) を $\mathbb{R}^n$ の点列とし，$a \in \mathbb{R}^n$ とする．次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) $\lim_{m\to\infty} x_m = a$ である．

(2) 任意の実数 $r > 0$ に対し，自然数 l で，任意の自然数 $m \geq l$ に対し $d(x_m, a) < r$ となるものが存在する．

(3) a を元として含む任意の開集合 $U \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \notin U\}$ は有限集合である． □

$\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \notin U\}$ が有限集合であることを，十分大きい m に対し $x_m \in U$ であるということがある．

証明　命題 3.1.7.1. より，(1) と (2) は同値である．

(2)⇒(3): $U \in \mathbb{R}^n$ を a を元として含む開集合とすると，$U_r(a) \subset U$ をみたす実数 $r > 0$ が存在する．自然数 l に対し，任意の自然数 $m \geq l$ が $d(x_m, a) < r$ をみたすならば，$\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \notin U\} \subset \{0, 1, \ldots, l-1\}$ は有限集合である．

(3)⇒(2): 自然数の有限集合 $\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \notin U_r(a)\} \cup \{0\}$ の最大元に 1 をたしたものを l とすればよい．■

まとめ

・$\mathbb{R}^n$ の距離を使って，$\mathbb{R}^n$ の部分集合が開集合であることと閉集合であることの定義をした．

・$\mathbb{R}^n$ の点列の収束を定義した．これも，開集合の用語で表わせる．

問題

A 3.2.1　$n \geq 1$ を自然数とする．

1. $(0,1)^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ．
2. $(0,1]^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合でも閉集合でもないことを示せ．

A 3.2.2　n を自然数とし，$a \in \mathbb{R}^n$ とする．関数 $d(a,\ ): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を，$x \in \mathbb{R}^n$ を $d(a,x) \in \mathbb{R}$ にうつすことで定める．$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$a \notin U$ とする．関数 $d(a,\ )$ の U への制限には，最大値も最小値もないことを示せ．

A 3.2.3　1. 部分集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ が，開集合であるということを，論理記号を使って表わしたい．空欄を論理記号でうめよ．

$$\square\ x \in U\ \square\ r \in \mathbb{R}(r > 0\ \square\ (\square\ y \in \mathbb{R}^n(d(x,y) < r\ \square\ y \in U))).$$

2. 1. の答の $\square\ x \in U$ と $\square\ r \in \mathbb{R}$ の順序をいれかえた条件をみたす部分集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ をすべて求めよ．

A 3.2.4　(x_n) を $\mathbb{R}^m$ の点列とし，$a \in \mathbb{R}^m$ とする．$x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nm}), a = (a_1, \ldots, a_m)$ とする．次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ である．

(2) $i = 1, \ldots, m$ に対し，$\lim_{n\to\infty} x_{ni} = a_i$ である．

3.3 連続写像

$\mathbb{R}^n$ の開集合で定義された $\mathbb{R}^m$ への写像の，連続性を定義する．U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$a \in U$ とし，$f\colon U \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^m$ を写像とする．$b \in \mathbb{R}^m$ とする．正の実数 $r > 0$ に対し，$[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ の部分集合

$$\{d(f(x), b) \mid x \in U, 0 < d(x, a) < r\} = \{d(y, b) \mid y \in f((U_r(a) \cap U) \setminus \{a\})\}$$

の上限 $S(r) = \sup_{x \in U, 0 < d(x,a) < r} d(f(x), b)$ が，0 以上の実数または ∞ として定まる．$0 < s < r$ なら，$S(s) \leq S(r)$ である．これらの下限 $\inf_{r>0} S(r) \in [0, \infty]$ も定まる．

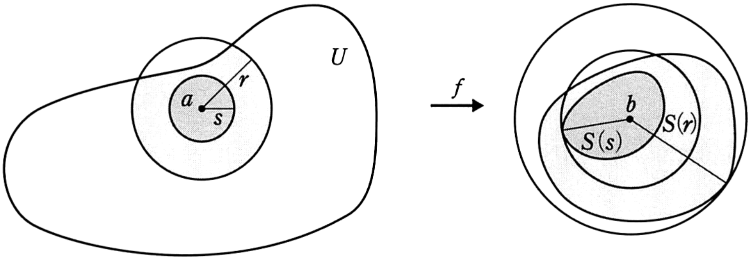


図 **3.2** $S(s) \leq S(r) = \sup_{x \in U, 0 < d(x,a) < r} d(f(x), b)$

U の点 x が a に近づくとは，$d(x, a) < r$ をみたす実数 $r > 0$ を 0 に近づけることと考えられる．$S(r)$ は，$0 < d(x, a) < r$ をみたす点 $x \in U$ に対し，$f(x)$ がどのくらい b から離れているかの限界を与えている．したがって，x が a に近づいたときに $f(x)$ が b に近づくとは，$r > 0$ が 0 に近づいたときに，$S(r)$ が 0 に近づくことと考えられる．$r > 0$ が小さくなれば，$S(r)$ も小さくなるのだから，$S(r)$ が 0 に限りなく近づくとは，$\{S(r) \mid r > 0\}$ の下限が 0 ということである．そこで，次のように定義する．

定義 3.3.1 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．

1. $a \in U$ とし，$f\colon U \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^m$ を写像とする．$b \in \mathbb{R}^m$ とする．

$$\inf_{r>0}\left(\sup_{x\in U, 0<d(x,a)<r} d(f(x),b)\right)=0$$

であるとき，b は $x \in U, x \neq a$ が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の**極限**であるといい，$b=\lim_{x\to a} f(x)$ で表わす．

2. $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ を写像とし，$a \in U$ とする．$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$ であるとき，f は a で**連続** (continuous) であるという．

3. $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ を写像とする．任意の $x \in U$ に対し f が x で連続であるとき，f は**連続写像**であるという．□

恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は連続であり，定値写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ も連続である．$V \subset U \subset \mathbb{R}^n$ が開集合で，$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ が連続写像ならば，f の V への制限 $f|_V\colon V \to \mathbb{R}^m$ も連続である．

$m=1$ のときは，連続写像 $f\colon U \to \mathbb{R}$ を連続関数とよぶ．連続関数の例をあげる．

命題 3.3.2　1. 加法 $+\colon \mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と乗法 $\cdot\colon \mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は連続である．

$x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ を x^{-1} にうつす写像 $\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ も連続である．

2. $i=1,\ldots,m$ に対し，射影 $\mathrm{pr}_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ は連続である．U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$f\colon U\to\mathbb{R}^m$ を写像とすると，$a\in U$ に対し，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) 写像 $f\colon U\to\mathbb{R}^m$ は a で連続である．

(2) $i=1,\ldots,m$ に対し，射影 $\mathrm{pr}_i\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ と f の合成 $f_i=\mathrm{pr}_i\circ f\colon U\to\mathbb{R}$ は a で連続である．□

証明　1. $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ とする．実数 $r>0$ と $x=(x_1,x_2)\in U_r(a)$ に対し，

$$d(x_1+x_2,a_1+a_2)\leq |x_1-a_1|+|x_2-a_2|<2r$$

である．よって，$\inf_{r>0}\left(\sup_{d(x,a)<r} d(x_1+x_2,a_1+a_2)\right)\leq \inf_{r>0} 2r=0$ である．同様に，

$$d(x_1x_2, a_1a_2) \leq |a_2| \cdot |x_1 - a_1| + |a_1| \cdot |x_2 - a_2| + |x_1 - a_1| \cdot |x_2 - a_2|$$
$$< (|a_1| + |a_2|)r + r^2$$

だから，$\inf_{r>0} \left(\sup_{d(x,a)<r} d(x_1x_2, a_1a_2) \right) \leq \inf_{r>0}((|a_1| + |a_2|)r + r^2) = 0$ である．

$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ とする．$r < \frac{|a|}{2}$ とすれば，$x \in U_r(a)$ に対し，$|a| < |x| + r < |x| + \frac{|a|}{2}$ だから，

$$d\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{a}\right) = \frac{|x-a|}{|x||a|} < \frac{2r}{|a| \cdot |a|}$$

である．よって $\inf_{0<r<\frac{|a|}{2}} \left(\sup_{d(x,a)<r} d\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{a}\right) \right) \leq \inf_{0<r<\frac{|a|}{2}} \frac{2r}{|a| \cdot |a|} = 0$ である．

2. $U \to \mathbb{R}^m$ を写像とし，$a, x \in U$ とすると，$1 \leq i \leq m$ に対し

$$d(f_i(x), f_i(a)) \leq d(f(x), f(a)) \leq d(f_1(x), f_1(a)) + \cdots + d(f_m(x), f_m(a))$$

である．よって，(1) と (2) は同値である．f を恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$ とすれば，(1)⇒(2) より，射影 $\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_m$ は連続である． ■

前節で定めた開集合の用語を使って，$\mathbb{R}^n$ の開集合で定義された $\mathbb{R}^m$ への写像の連続性の定義をいいかえる．

命題 3.3.3 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ を写像とする．

1. $a \in U$ に対し，次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) 写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ は a で連続である．

(2) 任意の実数 $q > 0$ に対し，次の条件をみたす実数 $r > 0$ が存在する：$d(x, a) < r$ をみたす任意の点 $x \in U$ に対し，$d(f(x), f(a)) < q$ がなりたつ．

(3) $f(a) \in V$ をみたす任意の開集合 $V \subset \mathbb{R}^m$ に対し，$a \in W \subset f^{-1}(V)$ をみたす開集合 $W \subset \mathbb{R}^n$ が存在する．

2. 次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) 写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ は連続である．

(2) 任意の開集合 $V \subset \mathbb{R}^m$ について，逆像 $f^{-1}(V) \subset U$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である． □

証明　1. (1)⇒(2): $\inf_{r>0}\left(\sup_{x\in U,0<d(x,a)<r} d(f(x),f(a))\right)=0$ とする．命題 3.1.4 より，任意の実数 $q>0$ に対し，$\sup_{x\in U,0<d(x,a)<r} d(f(x),f(a))<q$ をみたす実数 $r>0$ が存在する．このとき，$x\in U$ に対し，$d(x,a)<r$ ならば $d(f(x),f(a))<q$ である．

(2)⇒(1): $q>0$ を実数とする．条件 (2) をみたす実数 $r>0$ に対し，$\sup_{x\in U,d(x,a)<r} d(f(x),f(a))\leq q$ である．よって，$\inf_{r>0}\left(\sup_{x\in U,d(x,a)<r} d(f(x),f(a))\right)\leq q$ である．$q>0$ は任意だから，$\inf_{r>0}\left(\sup_{x\in U,d(x,a)<r} d(f(x),f(a))\right)=0$ である．

(2)⇒(3): $V\subset\mathbb{R}^m$ を，$f(a)$ を元として含む開集合とする．$U_q(f(a))\subset V$ をみたす実数 $q>0$ が存在する．条件 (2) は，任意の実数 $q>0$ に対し，$f(U_r(a)\cap U)\subset U_q(f(a))$ をみたす実数 $r>0$ が存在する，ということである．このとき，$\mathbb{R}^n$ の開集合 $W=U_r(a)\cap U$ は，$a\in W\subset f^{-1}(V)$ をみたす．

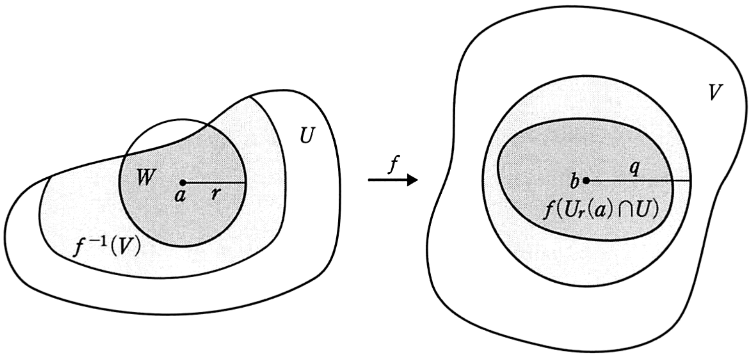


図 3.3　$W=U_r(a)\cap U\subset f^{-1}(V)$ と $f(U_r(a)\cap U)\subset U_q(f(a))\subset V$

(3)⇒(2): $q>0$ を実数とし，$V=U_q(f(a))$ とおけば，(3) より，$a\in W\subset f^{-1}(U_q(f(a)))$ をみたす開集合 $W\subset\mathbb{R}^n$ が存在し，$U_r(a)\subset W\subset f^{-1}(U_q(f(a)))$ をみたす実数 $r>0$ が存在する．このとき，$f(U_r(a))\subset U_q(f(a))$ である．よって，(2) がなりたつ．

2. (1)⇒(2): $V\subset\mathbb{R}^m$ を任意の開集合とする．$x\in f^{-1}(V)$ ならば，1.(1)⇒(3) より，$x\in W\subset f^{-1}(V)$ をみたす開集合 $W\subset\mathbb{R}^n$ が存在する．よって，$\mathcal{V}=\{W\in P(\mathbb{R}^n)\mid W$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であり，$W\subset f^{-1}(V)\}$ とおけば，

$f^{-1}(V) = \bigcup_{W \in \mathcal{V}} W$ であり，$f^{-1}(V)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

(2)⇒(1): 任意の $x \in U$ と開集合 $V \subset \mathbb{R}^m$ に対し，$f(x) \in V$ ならば $W = f^{-1}(V)$ とおけば，1. の条件 (3) がみたされる． ■

よりみち 57 命題 3.3.3.1. の条件 (2) は，写像の連続性の ε(イプシロン)-δ(デルタ) **論法** (ε-δ argument) による特徴づけである．ε-δ 論法は難しいという定評がある．

その理由としては，まず，「任意の」や「存在」の順序にかかわる構文が考えられる．また，x が近づくとき $f(x)$ が近づくという，定義域での変化につれておこる行き先での現象を表わすために，行き先での誤差の許容範囲 ε に応じて定義域での近似の程度 δ を選ぶという，一見逆転した内容も，その原因と考えられる．その外見についても，見慣れないギリシャ文字が原因の 1 つだという話もあるので，この本では ε-δ のかわりに，q-r を使ってみることにした．

命題 3.3.3.2. を使って，$\mathbb{R}^n$ の開集合や閉集合を構成することもできる．U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$a \in \mathbb{R}$ に対し，$V = \{y \in \mathbb{R} \mid y > a\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合だから，$f^{-1}(V) = \{x \in U \mid f(x) > a\}$ は，$\mathbb{R}^n$ の開集合である．同様に，$\{x \in U \mid f(x) < a\}$ も $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を連続写像とする．$A \subset \mathbb{R}^m$ が $\mathbb{R}^m$ の閉集合ならば，補集合 $\mathbb{R}^m \setminus A$ は開集合であり，逆像 $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus A)$ も開集合だから，$f^{-1}(A)$ も $\mathbb{R}^n$ の閉集合である．$a \in \mathbb{R}^m$ ならば，$\{a\}$ は閉集合だから，$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = a\}$ は，$\mathbb{R}^n$ の閉集合である．$m = 1$ ならば，$A = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq a\}$ は閉集合だから，$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq a\}$ も閉集合である．同様に，$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq a\}$ も閉集合である．

系 3.3.4 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，V を $\mathbb{R}^m$ の開集合とする．$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ と $g\colon V \to \mathbb{R}^l$ を連続写像とする．$f(U) \subset V$ ならば，合成写像 $g \circ f\colon U \to \mathbb{R}^l$ は連続である． □

証明 $W \subset \mathbb{R}^l$ を開集合とすると，$g^{-1}(W) \subset V \subset \mathbb{R}^m$ は開集合だから，$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) \subset U \subset \mathbb{R}^n$ も開集合である． ■

系 3.3.4 より，連続関数をくみあわせて，連続関数を構成することができる．U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．関数 $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ に対し，写像 $(f, g)\colon U \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と，加法 $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の合成 $h\colon U \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は，$h(x) = f(x) + g(x)$ で定まる関数である．これを $f + g$ で表わし，f と g の和とよぶ．同様に，積 $f \cdot g$ は，乗法 $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ との合成である．$f, g\colon U \to \mathbb{R}$ が連続関数ならば，その和と積 $f + g, f \cdot g\colon U \to \mathbb{R}$ も連続である．したがって，$f_1, \ldots, f_m\colon U \to \mathbb{R}$ を連続関数とし，$F \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m]$ を m 変数の多項式とすると，F の次数に関する帰納法により，合成関数 $F(f_1, \ldots, f_m)\colon U \to \mathbb{R}$ も連続関数である．$f, g\colon U \to \mathbb{R}$ が連続関数で，$0 \notin g(U)$ ならば，商 $f/g\colon U \to \mathbb{R}$ も連続関数である．線形写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は，連続写像である．

$\mathbb{R}^n$ の閉集合の具体例を 2 つあげる．$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ を，n 次元**閉円板** (closed disk) とよぶ．閉球とよぶこともある．$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ を，$n-1$ 次元**球面** (sphere) とよぶ．D^n と S^{n-1} は，連続関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ で定めると，それぞれ逆像 $f^{-1}([0,1])$ と $f^{-1}(1)$ だから，$\mathbb{R}^n$ の閉集合である．

よりみち 58　トポロジーでは，S^n のように n 次元の対象を上つき添字 n をつけて表わす習慣がある．M^n と書いてあっても，M を n 個かけたもの $M \times \cdots \times M$ を表わしているとは限らない．

よりみち 59　S^{n-1} などの $\mathbb{R}^n$ の部分集合を，**全体の空間** (ambient space) $\mathbb{R}^n$ と切り離して，独立した対象ととらえられることは，集合を考える利点の 1 つである．次章で定義する，部分空間としての位相を考えることで，これらを，幾何的にも独立した対象として考えることができるようになる．

集合を考えるもっと本質的な理由は，$\mathbb{R}^n$ の部分集合だけでなく，$\mathbb{R}^n$ からはみだした空間を，目的に応じて設定できることにある．このような構成は，多価解析関数の自然な定義域として考えられたリーマン面を起源とし，現代の幾何学の舞台である多様体の定義に端的にみられるものである．解析学では関数のなす無限次元空間や，代数学ではイデアルによる商環の構成なども重要である．これらは，20 世紀における，数学の抽象的な方向への発展の基盤となった．

関数の連続性を点列の収束で表わすこともできる．

命題 3.3.5 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ と $a \in U$ に対し，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ は a で連続である．

(2) U の点列 (x_k) が a に収束するならば，$\mathbb{R}^m$ の点列 $(f(x_k))$ は $f(a)$ に収束する． □

証明 (1)⇒(2): $V \subset \mathbb{R}^m$ を $f(a)$ を含む開集合とする．命題 3.3.3.1.(1)⇒(3) より，$a \in W \subset f^{-1}(V)$ をみたす開集合 $W \subset U \subset \mathbb{R}^n$ が存在する．命題 3.2.7(1)⇒(3) より，$\{k \in \mathbb{N} \mid f(x_k) \notin V\} \subset \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \notin W\}$ は有限集合である．よって，命題 3.2.7(3)⇒(1) より，$(f(x_k))$ は $f(a)$ に収束する．

(2)⇒(1)$^{\mathrm{AC}}$: 対偶を示す．命題 3.3.3.1.(3)⇒(1) の対偶より，$f(a) \in V$ をみたす開集合 $V \subset \mathbb{R}^m$ で，$a \in W$ をみたす任意の開集合 $W \subset U \subset \mathbb{R}^n$ に対し，$W \not\subset f^{-1}(V)$ となるものが存在する．このとき，任意の自然数 $k > 0$ に対し，$U_{\frac{1}{k}}(a) \cap U \not\subset f^{-1}(V)$ である．選択公理より，U の点列 $(x_k)_{k \geq 1}$ で，任意の $k \geq 1$ に対し，$x_k \in U_{\frac{1}{k}}(a) \cap U$ かつ $x_k \notin f^{-1}(V)$ をみたすものが存在する．このとき，任意の $k \geq 1$ に対し $d(x_k, a) < \frac{1}{k}$ だから，$\lim_{k \to \infty} x_k = a$ である．一方，$\{k \in \mathbb{N} \mid f(x_k) \notin V\} = \mathbb{N}$ は無限集合だから，命題 3.2.7 より，点列 $(f(x_k))$ は $f(a)$ に収束しない． ■

> **まとめ**
>
> ・$\mathbb{R}^n$ の開集合で定義された $\mathbb{R}^m$ への写像が，連続であることの定義をした．
>
> ・連続写像による逆像として，開集合や閉集合が得られる．
>
> ・関数の連続性を，点列の収束を使って表わすこともできる．

問題

A 3.3.1 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{R}$ を写像とする．$a \in U$ とする．定義 3.3.1.1. のように，$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ とはどういうことかを，定義せよ．

A 3.3.2 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ を写像とし，$a \in U$ とする．

1. f が a で連続であることを，形式化したい．

$$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ (d(x,a) < r \Rightarrow d(f(x), f(a)) < q)$$

の空欄に，(a) $\forall q > 0$, (b) $\exists r > 0$, (c) $\forall x \in U$ を正しい順序で当てはめよ．

2. 1. の空欄に，(a), (b), (c) を誤った順序で入れた場合，それぞれの条件をみたす写像を求めよ．

A 3.3.3 連続写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ を $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ で定める．f は，連続写像 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に延長できないことを示せ．

3.4 行列の集合 *

行列の記号を復習し，行列の空間の開集合や閉集合の重要な例を紹介する．これらは，群をなしているが，この本では，単に集合として考える．

$m, n \geq 0$ を自然数とする．$\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ を添字の集合とする $\mathbb{R}$ の元の族 $(x_{ij}; (i,j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\})$ を，**行列** (matrix) の記号 $\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$ で表わす．$\mathrm{Map}(\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}, \mathbb{R})$ を，m 行 n 列の実行列の空間とよび，$M(m, n; \mathbb{R})$ で表わす．$m = n$ のときは，$M(n, n; \mathbb{R})$ を $M(n, \mathbb{R})$ で表わす．

よりみち 60 $M(m, n; \mathbb{R}), M(n, \mathbb{R})$ を，それぞれ $M_{mn}(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})$ で表わすことも多い．

n 行 1 列の行列を，n 次元の**たてベクトル** (column vector) とよぶ．$\mathbb{R}^n$ の元 $(x_1, \ldots, x_n)$ をベクトルの記号 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ で表わし，$\mathbb{R}^n$ と n 次元のたてベクトルの空間 $M(n, 1; \mathbb{R})$ を同一視する．

行列の空間 $M(m, n; \mathbb{R})$ は mn 次元のベクトル空間 $\mathbb{R}^{mn}$ と考えられるから，$M(m, n; \mathbb{R})$ の開集合や，その連続写像が定義される．$X, Y \in M(m, n; \mathbb{R})$ に対し，その $\mathbb{R}^{mn}$ での標準内積は，${}^tX \in M(n, m; \mathbb{R})$ を X の転置行列とすると，

トレース $\mathrm{Tr}({}^tXY)$ である．行列の積 $M(m,n;\mathbb{R})\times M(n,r;\mathbb{R})\to M(m,r;\mathbb{R})$ は，行列の成分の多項式で定義されるから，連続写像である．同様に，行列式 $\det\colon M(n,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ も，連続関数である．したがって，$GL(n,\mathbb{R})=\{A\in M(n,\mathbb{R})\mid \det A\neq 0\}$ は $M(n,\mathbb{R})$ の開集合であり，$SL(n,\mathbb{R})=\{A\in M(n,\mathbb{R})\mid \det A=1\}$ は $M(n,\mathbb{R})$ の閉集合である．$GL(n,\mathbb{R})$ を**一般線形群** (general linear group) といい，$SL(n,\mathbb{R})$ を**特殊線形群** (special linear group) という．

$\Delta(A)$ を A の余因子行列とすると，$\Delta(A)$ の各成分は A の成分の多項式である．したがって，$A\in GL(n,\mathbb{R})$ を逆行列 $A^{-1}=(\det A)^{-1}\Delta(A)$ にうつす写像 ${}^{-1}\colon GL(n,\mathbb{R})\to M(n,\mathbb{R})$ は連続である．$A\in M(n,\mathbb{R})$ を転置行列 ${}^tA$ にうつす写像 ${}^t\colon M(n,\mathbb{R})\to M(n,\mathbb{R})$ も連続である．したがって，$O(n,\mathbb{R})=\{A\in GL(n,\mathbb{R})\mid A\,{}^tA=1\}$, $SO(n,\mathbb{R})=O(n,\mathbb{R})\cap SL(n,\mathbb{R})$ は，$M(n,\mathbb{R})$ の閉集合である．$O(n,\mathbb{R})$ を**直交群** (orthogonal group) といい，$SO(n,\mathbb{R})$ を**特殊直交群**という．

$\mathbb{C}^n$ は，$(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{2n}$ を $x+\sqrt{-1}y\in\mathbb{C}^n$ と同一視することで，$\mathbb{R}^{2n}$ と同一視できる．$x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{C}^n$ に対し，$\langle x,y\rangle=x_1\overline{y_1}+\cdots+x_n\overline{y_n}\in\mathbb{C}$ を x と y の標準内積という．$x,y\in\mathbb{C}^n$ に対し，$\mathbb{R}^{2n}$ での標準内積は，$\mathbb{C}^n$ での標準内積の実部である．$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ はベクトル x の長さである．長さ $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ は $\mathbb{R}^{2n}$ と $\mathbb{C}^n$ のどちらで考えても同じである．

$M(m,n;\mathbb{C})$ は，複素 $m\times n$ 行列の空間であり，$M(n,\mathbb{C})$ は複素 n 次正方行列の空間である．$X,Y\in M(m,n;\mathbb{C})$ に対し，$\mathbb{C}^{mn}$ での標準内積は，$\mathrm{Tr}({}^tX\overline{Y})$ である．一般線形群 $GL(n,\mathbb{C})=\{A\in M(n,\mathbb{C})\mid\det A\neq 0\}$ は $M(n,\mathbb{C})$ の開集合であり，特殊線形群 $SL(n,\mathbb{C})=\{A\in M(n,\mathbb{C})\mid \det A=1\}$ は $M(n,\mathbb{C})$ の閉集合である．$A\in M(n,\mathbb{C})$ の転置の共役 $\overline{{}^tA}$ を A の**随伴行列** (adjoint) とよび，A^* で表わす．$U(n)=\{A\in GL(n,\mathbb{C})\mid A^*A=1\}$, $SU(n)=U(n)\cap SL(n,\mathbb{C})$ は $M(n,\mathbb{C})$ の閉集合である．$U(n)$ を**ユニタリ群** (unitary group) といい，$SU(n)$ を**特殊ユニタリ群**という．

まとめ

・一般線形群は，行列の空間の開部分集合であり，特殊線形群，直交群，特殊直交群，ユニタリ群，特殊ユニタリ群は閉部分集合である．

問題

A 3.4.1　写像 $f\colon SU(2) \to \mathbb{C}^2$ を $f(A) = A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ で定める．f は可逆写像 $SU(2) \to S^3$ をひきおこすことを示し，逆写像を求めよ．

B 3.4.2　$n \geq 2$ を自然数とし，$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする．連続写像 $f\colon SO(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ を，$f(A) = Ae_1$ で定める．

1. $f(SO(n,\mathbb{R})) = S^{n-1}$ を示せ．
2. $A \in SO(n,\mathbb{R})$ とする．$f^{-1}(f(A)) = \left\{ A \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & B\end{pmatrix} \,\middle|\, B \in SO(n-1,\mathbb{R}) \right\}$ を示せ．

第4章 位相

この章での主な目標は，位相空間と連続写像についての用語を定義することである．4.1 節と 4.2 節で基本的用語を定義し，4.3 節で補助的な用語を定義する．4.1 節では，集合に開集合系を指定することで，その集合の位相を定義する．4.2 節では，連続関数や収束列の一般化である，連続写像を定義する．4.3 節では，位相空間について，その閉集合や閉包，近傍などの用語を定義する．

4.1 位相空間

定義 4.1.1 X を集合とする．X の部分集合からなる集合 $\mathcal{O} \subset P(X)$ が次の条件 (1) と (2) をみたすとき，$\mathcal{O}$ は X の**位相** (topology) であるという．

(1) $(U_i)_{i\in I}$ が $\mathcal{O}$ の元の族ならば，$\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$ である．

(2) $(U_i)_{i\in I}$ が $\mathcal{O}$ の元の有限族ならば，$\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$ である． □

集合 X に位相 $\mathcal{O}$ が指定されているとき，X を**位相空間** (topological space) とよぶ．集合 X に位相を指定し位相空間と考えることを，X に位相をいれるという．

よりみち 61 集合 X に位相 $\mathcal{O}$ を指定するとは，正確にいえば対 $(X, \mathcal{O})$ を考えるということである．しかし，位相 $\mathcal{O}$ は補助的な対象であると考え，単に X を位相空間とよぶのがふつうである．そうはいっても，X が同じ集合でも位相 $\mathcal{O}$ が違えば，位相空間としては違うものである．$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が集合 X の 2 つの位相であるとき，位相空間 $(X, \mathcal{O}_1)$ と $(X, \mathcal{O}_2)$ を区別して表わしたいときは，それぞれを X_1, X_2 のように表わせばよい．

位相空間 X というときには，$\mathcal{O}$ が明記されていなくても，位相 $\mathcal{O}$ が定まっているものと考える．線形空間 V というときに，加法とスカラー倍をいちいち書かないのと同様である．

O とその筆記体 $\mathcal{O}$ を区別したいときは，$\mathcal{O}$ をスクリプト O と読み，O をローマン O と読む．

定義 4.1.2 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．X の部分集合 U が $\mathcal{O}$ の元であるとき，U は，$\mathcal{O}$ が定める位相に関して，X の**開集合**であるという．$\mathcal{O}$ を X の**開集合系** (system of open sets) という． □

定義 4.1.1. の条件 (1) と (2) を，**開集合の公理**という．開集合系の公理あるいは位相の公理ということもある．位相空間 X の部分集合 U が X の開集合であるとき，U は開であるともいう．開部分集合であるともいう．

よりみち 62 この章での目標は，一般の集合にも，定義 4.1.1 のように位相を定義することで，$\mathbb{R}^n$ の開集合と同様に，その幾何的な性質を扱えるようにすることである．集合とは点の集まりだから，そこには全体か各点しかなく，ばらばらのものである．そこに，開集合系という，中間的なものを指定することで，集合を幾何的に考えることができるようになる．

目的に応じて開集合系を指定するが，それは全く自由にできるというわけではなく，命題 3.2.5 の性質 1. と 2. をみたすことが必要である．逆にいうと，どんな集合であっても，この性質をみたすように開集合系を指定することが，集合を幾何的に扱うことであると考えられる．これが上の定義 4.1.1 である．定義 4.1.1 の条件をみたすように開集合系を指定することを，集合に位相を定めるといい，位相が定められた集合を位相空間とよぶ．

微積分の基礎となる，関数の連続性や，点列の極限のような幾何的な性質は，命題 3.3.3 や命題 3.2.7 のように，開集合によって記述できる．一般の集合に対しても，位相を定めることで，これらの性質を，定義 4.2.1 や定義 8.2.1 のように，定義することができる．この章での目標は，このようにして，連続写像などの幾何的な概念が定式化されることや，いろいろな幾何的な対象を記述できることを理解することである．

位相空間の定義も，公理的な定義である．公理的方法をとることで，議論

の不要な反復を避け，論点を明確にすることができる．しかし，公理的方法の真の効用はそのような消極的なものではなく，見かけ上かけ離れた対象を比較できるようにし，その共通点や相違点を明らかにすることにある．

定義 4.1.1 のように，開集合系で位相を定義する方法は，現在もっともよく使われるものである．以前には，4.3 節で導入する，閉包や近傍によって定義されていた．この本では，それらの定義や，開集合系による定義との同値性についてはふれない．開集合系による定義が主流となった理由には，局所的な考察や層の定義に適していることなどが考えられる．

よりみち 63 物理でもでてくる波の位相は，英語では phase という違うことばである．解析力学では，一般座標と一般運動量を座標と考えた空間を位相空間とよぶが，これも phase space という違うことばである．

位相空間をホモロジー群やホモトピー群などを使って研究する数学の分野を，トポロジーとよんで，この本で扱うような位相空間の抽象的性質をさすときと使い分けている．この使い分けは，英語の topology と，general topology の使い分けに対応している．

開集合の公理を，同値な条件でいいかえる．

命題 4.1.3 X を集合とし，$\mathcal{O}$ を $P(X)$ の部分集合とする．

1. 次の条件 (1) と (1′) は同値である．

(1) $(U_i)_{i\in I}$ が $\mathcal{O}$ の元の族ならば，$\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$ である．

(1′) X の部分集合 U で，U の任意の元 x に対し $x \in V \subset U$ をみたす $V \in \mathcal{O}$ が存在するという条件をみたすものはすべて，$\mathcal{O}$ の元である．

2. 次の条件 (2) と (2′) は同値である．

(2) $(U_i)_{i\in I}$ が $\mathcal{O}$ の元の有限族ならば，$\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$ である．

(2′) $X \in \mathcal{O}$ である．$U, V \in \mathcal{O}$ ならば，$U \cap V \in \mathcal{O}$ である． □

証明 1. (1)⇒(1′): 部分集合 $U \subset X$ に対し，$\mathcal{U}_U = \{V \in \mathcal{O} \mid V \subset U\}$ とおく．(1′) は，$U = \bigcup_{V\in\mathcal{U}_U} V$ ならば $U \in \mathcal{O}$ ということである．よって (1) ならば (1′) である．

(1′)⇒(1): $(U_i)_{i\in I}$ を $\mathcal{O}$ の元の族とする．任意の $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$ に対し，$x \in U_j$ をみたす $j \in I$ が存在する．このとき，$x \in U_j \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ だから，$\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$ である．

2. (2)⇒(2′): $(U_i)_{i\in\emptyset}$ を $\mathcal{O}$ の元の空な族とすれば，例題 2.4.1 より，$X = \bigcap_{i\in\emptyset} U_i \in \mathcal{O}$ である．$\mathcal{O}$ の元の有限族 $(U_i)_{i\in\{1,2\}}$ を $U_1 = U$, $U_2 = V$ で定めれば，$U \cap V = \bigcap_{i\in\{1,2\}} U_i \in \mathcal{O}$ である．

(2′)⇒(2): $(U_i)_{i\in I}$ を $\mathcal{O}$ の元の有限族とする．$\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$ を I の元の個数に関する帰納法で示す．$I = \emptyset$ ならば，$\bigcap_{i\in\emptyset} U_i = X \in \mathcal{O}$ である．$j \in I$ とし $I' = I \setminus \{j\}$ とおく．帰納法の仮定より，$\bigcap_{i\in I'} U_i \in \mathcal{O}$ である．よって，$\bigcap_{i\in I} U_i = U_j \cap \bigcap_{i\in I'} U_i \in \mathcal{O}$ である． ■

開集合の公理 (1) と (2) で，それぞれ $I = \emptyset$ のときを考えれば，$\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$ である．$\mathcal{O} = P(X)$ で定まる位相を X の**離散位相** (discrete topology) といい，$\mathcal{O} = \{X, \emptyset\}$ で定まる位相を X の**密着位相** (coarsest topology) という．

このように，1 つの集合に位相を定める方法は，一般にはたくさんある．$\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ を，集合 X の位相とする．$\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$ であるとき，$\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より**細かい** (finer) といい，$\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より**粗い** (coarser) という．$\mathcal{O}_1 \supsetneqq \mathcal{O}_2$ であるとき，$\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より**真に** (strictly) 細かいという．$\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ より細かいことを，$\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ より**強い** (stronger) ということもある．$\mathcal{O}_2$ が $\mathcal{O}_1$ より粗いことを，$\mathcal{O}_2$ が $\mathcal{O}_1$ より**弱い** (weaker) ということもある．強い，弱いという用語を，これとは逆の意味で使う文献もあるそうなので，気をつける必要がある．

$T(X) \subset P(P(X))$ で集合 X 上の位相全体の集合を表わせば，$\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in T(X)$ について，$\mathcal{O}$ が $\mathcal{O}'$ より細かいという関係は，集合 $T(X)$ に順序を定める．

位相空間の重要な例を 2 つあげる．

【例 4.1.4】 1. $\mathbb{R}^n$ の位相．$\mathcal{O} \subset P(\mathbb{R}^n)$ を，定義 3.2.3.2. で定義した $\mathbb{R}^n$ の開集合すべてからなる集合とすると，$\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}^n$ の位相である．

2. $2 = \{0, 1\}$ を考える．$\{\emptyset, \{1\}, 2\} \subset P(2)$ は 2 の位相である．この位相は，離散位相とも密着位相とも異なる．

以下，$\mathbb{R}^n$ **の位相**を考えるときは，とくにそうでないと書いてなければ，例 4.1.4.1. で定めた位相を考える．$2 = \{0, 1\}$ を，例 4.1.4.2. で定めた位相により位相空間と考えたものを，**線**（仏 trait）とよび，$\mathbb{S}$ で表わす．$\mathbb{S}$ の位相は，

離散位相より真に粗く，密着位相より真に細かい．$\mathbb{S}$ は，この本だけの記号であり，線もこの本だけの用語である．

定義 4.1.5 X を位相空間とし，$x \in X$ とする．$x \in U$ をみたす開集合 U を，x の**開近傍** (open neighborhood) という．$\{x\}$ が x の開近傍であるとき，x は X の**孤立点** (isolated point) であるという． □

位相空間 X の部分集合 U が X の開集合であるとは，命題 4.1.3.1. より，U の任意の元 x に対し x の開近傍で U の部分集合であるものが存在することである．位相空間 X が離散であるとは，X の任意の点が孤立点であることである．$\mathbb{R}$ には，孤立点はない．$\mathbb{S}$ の点 1 は孤立点であり，0 は孤立点でない．

写像 $f\colon X \to Y$ によって，Y の位相を X にひきもどしたり，X の位相を Y に送ったりすることができる．

命題 4.1.6 $f\colon X \to Y$ を写像とする．

1. $\mathcal{O}$ が Y の位相ならば，$f^*\mathcal{O} = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{O}\}$ は X の位相である．
2. $\mathcal{O}$ が X の位相ならば，$\mathcal{O}' = \{V \in P(Y) \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{O}\}$ は Y の位相である． □

証明 1. $(U_i)_{i\in I}$ を Y の開集合の族とする．$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$ は $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} U_i)$ と等しいから，$f^*\mathcal{O}$ の元である．$\bigcap_{i\in I} f^{-1}(U_i)$ も $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} U_i)$ と等しいから，I が有限集合ならば $f^*\mathcal{O}$ の元である．

2. $(V_i)_{i\in I}$ を $\mathcal{O}'$ の元の族とする．$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} V_i)$ は $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$ と等しいから，$\bigcup_{i\in I} V_i$ は $\mathcal{O}'$ の元である．$f^{-1}(\bigcap_{i\in I} V_i)$ も $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(V_i)$ と等しいから，I が有限集合ならば $\bigcap_{i\in I} V_i$ も $\mathcal{O}'$ の元である． ■

写像 $f^*\colon P(Y) \to P(X)$ を $f^*(B) = f^{-1}(B)$ で定める（2.5 節）と，Y の位相 $\mathcal{O}$ に対し，X の位相 $f^*\mathcal{O}$ は，f^* による $\mathcal{O} \subset P(Y)$ の像 $f^*(\mathcal{O})$ である．X の位相 $\mathcal{O}$ に対し，Y の位相 $\mathcal{O}'$ は，f^* による $\mathcal{O} \subset P(X)$ の逆像 $(f^*)^{-1}(\mathcal{O})$ である．

定義 4.1.7 1. $f\colon X \to Y$ を写像とし，$\mathcal{O}$ を Y の位相とする．X の位相

$f^*\mathcal{O}$ を $\mathcal{O}$ の f による**ひきもどし** (pull-back) という．逆像ということもある．

2. X を位相空間とし，A をその部分集合とする．X の位相 $\mathcal{O}$ の包含写像 $i\colon A \to X$ によるひきもどし $i^*\mathcal{O}$ を，A の**相対位相**（そうたい）(relative topology) とよぶ．相対位相により A を位相空間と考えるとき，A を X の**部分位相空間** (topological subspace) とよぶ．

3. $f\colon X \to Y$ を写像とし，$\mathcal{O}$ を X の位相とする．Y の位相 $\{V \in P(Y) \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{O}\}$ を，f による**像位相**という． □

部分位相空間のことを，単に**部分空間** (subspace) とよぶことも多い．A を X の部分位相空間とし，$\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_X$ をそれぞれ A と X の位相，$i\colon A \to X$ を包含写像とすると，$\mathcal{O}_A = i^*\mathcal{O}_X = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}_X\}$ である．B が A の部分集合ならば，B を X の部分空間と考えたものと，B を A の部分空間と考えたものは同じものである．X の開集合 U を X の部分空間と考えるとき，U を X の**開部分空間**という．開部分空間 U に対しては，$\mathcal{O}_U = \{V \in \mathcal{O}_X \mid V \subset U\}$ である．

以下，とくにことわらない限り，$\mathbb{R}^n$ の部分集合を位相空間と考えるときは，$\mathbb{R}^n$ の部分位相空間と考える．たとえば，$n-1$ 次元球面 S^{n-1} は，$\mathbb{R}^n$ の部分位相空間と考える．$\mathbb{R}$ の部分空間 $\mathbb{N}$ は離散空間である．$GL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R}), O(n,\mathbb{R}), SO(n,\mathbb{R})$ は，$M(n,\mathbb{R})$ の部分位相空間と考える．同様に，$GL(n,\mathbb{C}), SL(n,\mathbb{C}), U(n), SU(n)$ も $M(n,\mathbb{C})$ の部分位相空間と考える．

まとめ

・集合に開集合系を指定することで，位相が定まる．

・1 つの集合にいろいろな位相を定められる．それらを比較することができる．

・第 3 章で定義した $\mathbb{R}^n$ の開集合系は，$\mathbb{R}^n$ の位相を定める．

・写像によって，位相をひきもどしたり送ったりできる．部分集合への位相のひきもどしが，部分空間の位相を定める．

問題

A 4.1.1 1. $\mathbb{R}$ の部分空間 $\mathbb{N}$ の位相は，離散位相であることを示せ．

2. $A \subset \mathbb{R}^n$ が有限部分集合ならば，A は部分空間として，離散空間であることを示せ．

3. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 A に対し，A の位相が密着位相であるための条件は，A の元の個数が 1 以下であることを示せ．

4. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を収束する実数列とし，$b = \lim_{n\to\infty} a_n$，$B = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{b\}$ とおく．$\mathbb{R}$ の部分空間 $B \setminus \{b\}$ は，離散空間であることを示せ．B が離散空間ならば，$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b\}$ は有限集合であることも示せ．

A 4.1.2 1. X を集合とし．$(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ を X の位相の族とする．共通部分 $\mathcal{O} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_i$ は，X の位相であることを示せ．

2. 写像 $f, g\colon 3 = \{0, 1, 2\} \to 2$ を，$f(0) = g(1) = 0$, $f(1) = f(2) = g(0) = g(2) = 1$ で定める．$\mathbb{S}$ の位相 $\mathcal{O}$ のひきもどし $f^*\mathcal{O}$, $g^*\mathcal{O}$ について，合併 $f^*\mathcal{O} \cup g^*\mathcal{O}$ は 3 の位相ではないことを示せ．

A 4.1.3 写像 $f\colon X \to Y$ と X の位相 $\mathcal{O}$ に対し，巾集合 $P(Y)$ の部分集合 $f_*\mathcal{O}$ を $\{f(U) \mid U \in \mathcal{O}\}$ で定める．

1. f が全射でなければ，$f_*\mathcal{O}$ は Y の位相でないことを示せ．

2. 全射 $f\colon X \to Y$ と X の位相 $\mathcal{O}$ で，$f_*\mathcal{O}$ が Y の位相でないものの例を 1 つあげよ．

BP 4.1.4 1. Y を位相空間，X を Y の部分空間とし，$\mathcal{O}_X$ を X の開集合系とする．補集合 $Y \setminus X$ が 1 点 $c \in Y$ だけからなるとする．部分集合 $\mathcal{V} = \{U \cap X \mid U$ は c の開近傍 $\} \subset \mathcal{O}_X$ は，次の条件 (1) と (2) をみたすことを示せ．

(1) $U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{V}, U \supset V$ ならば，$U \in \mathcal{V}$ である．

(2) $(V_i)_{i\in I}$ が $\mathcal{V}$ の元の有限族ならば，$\bigcap_{i\in I} V_i \in \mathcal{V}$ である．

2. c が Y の孤立点でないことは，次の条件 (3) と同値であることを示せ．

(3) $\emptyset \notin \mathcal{V}$.

3. X が Y の開部分空間であることは，Y の開集合系が $\mathcal{O}_X \amalg \{V \amalg \{c\} \mid V \in \mathcal{V}\}$ であることと同値であることを示せ．

4. X を位相空間とし，$\mathcal{O}_X$ を X の開集合系，$\mathcal{V} \subset \mathcal{O}_X$ を 1. の条件 (1) と (2) をみたす部分集合とする．$Y = X \amalg \{c\}$ を無縁和とし，巾集合 $P(Y)$ の部分集合 $\mathcal{O}$ を，$\mathcal{O} = \mathcal{O}_X \amalg \{V \amalg \{c\} \mid V \in \mathcal{V}\}$ で定める．$\mathcal{O}$ は Y の位相であることを示せ．

よりみち 64 X が離散位相空間であるとき，問題 4.1.4 の条件 (1)–(3) をみたす部分集合 $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}_X = P(X)$ を X の**フィルター** (filter) とよぶ．条件 (1)–(3) をフィルターの公理という．

C 4.1.5 $r > 0$ を実数，a を複素数とする．$U_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ 上定義された定数でない正則関数 $f: U_r(a) \to \mathbb{C}$ を考える．$b \in \mathbb{C}$ に対し，$U_r(a)$ の部分空間 $f^{-1}(b)$ は，離散であることを示せ．

4.2 連続写像

命題 3.3.3 で，$\mathbb{R}^n$ の開集合 U と写像 $f: U \to \mathbb{R}^m$ に対し，f が連続であるための条件を，開集合を使って表わした．これを，一般の位相空間の写像の連続性の定義として，採用する．

定義 4.2.1 X と Y を位相空間とし，$f: X \to Y$ を写像とする．

1. f が**連続写像**であるとは，Y の任意の開集合 V に対し，$f^{-1}(V)$ が X の開集合であることをいう．

2. $a \in X$ とする．f が a で**連続**であるとは，$f(a)$ の任意の開近傍 V に対し，a の開近傍 U で $U \subset f^{-1}(V)$ をみたすものが存在することをいう． □

位相空間 X の恒等写像は連続である．系 3.3.4 と同様に，$f: X \to Y$ と $g: Y \to Z$ が連続写像なら，合成写像 $g \circ f: X \to Z$ も連続写像である．連続写像 $X \to \mathbb{R}$ を，連続関数ともよぶ．閉区間 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ からの連続写像 $I \to X$ を，**曲線** (curve) という．**道** (path) ということもある．8.2 節で，点列の収束も，連続写像としてとらえられることを解説する．

命題 4.2.2 X と Y を位相空間とし，$f: X \to Y$ を写像とする．

1. $\mathcal{O}_X$ と $\mathcal{O}_Y$ でそれぞれ X と Y の位相を表わす．次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) f は連続である．

(2) f によるひきもどし $f^*\mathcal{O}_Y = \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{O}_Y\}$ は，$\mathcal{O}_X$ より粗い．

(3) f による像位相 $\{V \in P(Y) \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X\}$ は，$\mathcal{O}_Y$ より細かい．

2. 次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) f は連続である．

(2) X の任意の点 x に対し，f は x で連続である． □

証明 1. どれも，任意の $V \in \mathcal{O}_Y$ に対し，$f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ ということである．

2. (1)⇒(2): $f\colon X \to Y$ が連続であるとし，V を $f(x) \in Y$ の開近傍とすると，$f^{-1}(V) \subset X$ は x の開近傍である．

(2)⇒(1): $f\colon X \to Y$ が，X の任意の点 x で連続であるとする．V を Y の開集合とする．任意の $x \in f^{-1}(V)$ に対し，V は $f(x)$ の開近傍だから，x の開近傍 U で $U \subset f^{-1}(V)$ をみたすものが存在する．命題 4.1.3.1. より，$f^{-1}(V)$ は X の開集合である．よって，f は連続である． ■

X の位相 $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ により，X を位相空間と考えたものを，それぞれ X_1 と X_2 で表わすと，$\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ より細かいとは，恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X_1 \to X_2$ が連続であることである．X の位相が細かければ細かいほど，写像 $f\colon X \to Y$ は連続になりやすい．とくに，X の位相が離散位相ならば，すべての写像 $f\colon X \to Y$ は連続である．同様に，Y の位相が粗ければ粗いほど，写像 $f\colon X \to Y$ は連続になりやすい．とくに，Y の位相が密着位相ならば，すべての写像 $f\colon X \to Y$ は連続である．

a が X の孤立点ならば，任意の写像 $f\colon X \to Y$ は a で連続である．Y の位相が離散位相ならば，写像 $f\colon X \to Y$ が連続であるとは，任意の $x \in X$ に対し，x の開近傍 U で，U への制限 $f|_U\colon U \to Y$ が定値写像となるものが存在することである．Y が数の集合であるとき，このような f を，**局所定数 (locally constant) 関数**という．

A が X の部分空間なら，包含写像 $A \to X$ は連続である．したがって，連続写像 $f\colon X \to Y$ の部分空間 $A \subset X$ への制限 $f|_A\colon A \to Y$ は連続である．Y を位相空間とし，X を写像 $f\colon X \to Y$ による Y の位相のひきもどしにより位相空間と考える．位相空間 T と写像 $g\colon T \to X$ に対し，g が連続であることと合成写像 $f \circ g\colon T \to Y$ が連続であることは同値である．とくに，B が Y の部分空間であるとき，位相空間 T と写像 $f\colon T \to B$ に対し，写像 $f\colon T \to B$ が連続であることと写像 $f\colon T \to Y$ が連続であることは同値である．

連続写像全体がなす $\mathrm{Map}(X, Y)$ の部分集合を

$$C(X, Y) = \{f \in \mathrm{Map}(X, Y) \mid f \text{ は連続 }\}$$

で表わす．$Y=\mathbb{R}$ のときには，$C(X,\mathbb{R})=\{f\in \mathrm{Map}(X,\mathbb{R}) \mid f$ は連続 $\}$ を $C(X)$ で表わす．

位相空間 X の部分集合 U について，U が開集合であるための条件は，特性関数 $\chi_U\colon X\to\mathbb{S}$ が連続であることである．したがって，$P(X)$ を X の巾集合とし，$\mathrm{Map}(X,2)\to P(X)$ を，写像 $f\colon X\to 2$ を部分集合 $f^{-1}(1)\subset X$ にうつす可逆写像とすると，その $C(X,\mathbb{S})$ への制限は，X の位相への可逆写像 $C(X,\mathbb{S})\to\mathcal{O}$ を定める．

定義 4.2.3　X と Y を位相空間とする．

1. $f\colon X\to Y$ を連続写像とする．f が可逆であり，逆写像 $f^{-1}\colon Y\to X$ も連続写像であるとき，f は**同相写像** (homeomorphism) であるという．

2. 同相写像 $f\colon X\to Y$ が存在するとき，X と Y は**同相** (homeomorphic) であるという．□

連続写像 $f\colon X\to Y$ が同相写像であるとは，$f\colon X\to Y$ が可逆写像であり，$f^*\mathcal{O}_Y=\mathcal{O}_X$ であることである．同相写像を位相同形とよぶこともある．位相空間 X の恒等写像 id_X は同相写像である．$f\colon X\to Y$ が同相写像ならば，逆写像 $f^{-1}\colon Y\to X$ も同相写像である．$f\colon X\to Y$ と $g\colon Y\to Z$ が同相写像ならば，合成写像 $g\circ f\colon X\to Z$ も同相写像である．連続写像 $f\colon X\to Y$ が可逆写像でも，同相写像であるとは限らない．たとえば，$2=\{0,1\}$ を離散空間とすると，恒等写像 $2\to\mathbb{S}$ は連続全単射だが，同相写像ではない．

空でない開区間 (a,b) は $\mathbb{R}$ と同相である（問題 6.2.1）．半開区間 $[a,b)$ は $\mathbb{R}$ と同相でない（問題 6.2.5.2.）．閉区間 $[a,b]$ も $\mathbb{R}$ と同相でない（定理 6.3.6 と例 6.3.5）．

よりみち 65　X と Y が違う空間であっても，同相ならば，X と Y は位相空間としては同じものだと思うことができる．既知の空間との間に同相写像を構成できれば，未知の空間も位相空間としてはわかったことになる．

命題 7.2.6 より，可逆写像 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ が存在する．したがって，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は違う集合ではあるが，同一視することもできる．一方，同相写像 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ は存在しない（問題 6.2.5.3.）．一般に，$\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ が同相であることは $n=m$ と同値である．このことは，たとえばホモロジー群を考えることで示せるが，こ

の本ではふれない．

このように，次元のような幾何的性質を考えるには，対象を単に集合ととらえるのでは不十分であり，位相を考えることが必要である．

定義 4.2.4 X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．

1. 写像 $f\colon X \to Y$ が単射であり，X の位相が f による Y の位相のひきもどしであるとき，f は**うめこみ** (imbedding) であるという．
2. 連続写像 $r\colon Y \to X$ が $r \circ f = \mathrm{id}_X$ をみたすとき，r は f の**レトラクション** (retraction) であるという． □

$f\colon X \to Y$ がうめこみであるとは，f が，Y の部分空間 $f(X)$ への同相写像 $X \to f(X)$ を定めるということである．連続な単射であっても，うめこみであるとは限らない．f が同相であるとは，f がうめこみかつ全射であるということである．レトラクションがあれば，うめこみである．

よりみち 66 うめこみという用語を，少し違う条件で定義する本もある．部分空間への同相写像といえば誤解の余地はないが，長い．レトラクションは連続であるとしたが，単に $r \circ f = \mathrm{id}$ をみたす写像という意味で使われることもある．連続なレトラクションといえば誤解の余地はない．5.4 節ででてくるセクションについても同様である．

命題 4.2.5 X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．f のレトラクション $r\colon Y \to X$ が存在するならば，f はうめこみである． □

証明 f は，部分空間 $f(X)$ への連続な可逆写像 $g\colon X \to f(X)$ を定める．g の逆写像は，包含写像 $i\colon f(X) \to Y$ と r の合成 $r \circ i$ だから，連続である． ■

$m \leq n$ とし，連続単射 $i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を $i(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ で定義する．連続写像 $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $p(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$ で定めると，p は i のレトラクションだから，命題 4.2.5 より，$i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ はうめこみである．

まとめ

・開集合の逆像が開集合になる写像が，連続写像である．
・逆写像も連続な連続可逆写像を，同相写像という．
・同相な位相空間は，位相空間としては同じものと考えられる．
・うめこみは，部分空間への同相写像である．

問題

A 4.2.1 位相空間から位相空間への写像が，連続であるための十分条件を，次節以降から，5 個以上抜き出せ．

A 4.2.2 $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ と $V = \mathbb{R}^2 \setminus \big([-1,1] \times \{0\}\big)$ は，どちらも $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ と同相であることを示せ．

A 4.2.3 n を自然数とする．
1. 半径 1 の開球 $U_1(0)$ は，$\mathbb{R}^n$ と同相であることを示せ．
2. n 次元閉円板 D^n は，$(D^1)^n \subset \mathbb{R}^n$ と同相であることを示せ．

A 4.2.4 写像 $p\colon S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\} \to \mathbb{R}^n$ を，

$$p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\dots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$$

で定める．$p\colon S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\} \to \mathbb{R}^n$ は同相写像であることを示せ．

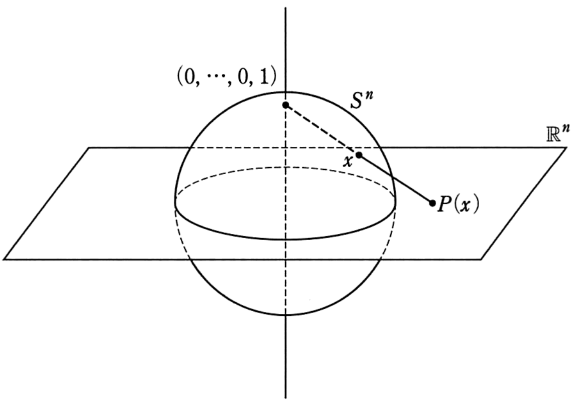


図 4.1 立体射影

よりみち 67 同相写像 $p\colon S^n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\} \to \mathbb{R}^n$ を，**立体射影** (stereographic projection) とよぶ（図 4.1）．

A 4.2.5 n を自然数とする．写像 $GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})\colon A \mapsto A^{-1}$ は同相写像であることを示せ．

A 4.2.6 写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (\cos t, \sin t)$ で定義する．

1. f は連続であることを示せ．
2. a, b を $a < b \leq a + 2\pi$ をみたす実数とする．f の (a,b) への制限は，うめこみであることを示せ．
3. f の $[0, 2\pi)$ への制限は連続単射だが，うめこみではないことを示せ．

A 4.2.7 X と Y を位相空間とする．

1. 写像 $f\colon X \to Y$ に対し，次の条件 (1)–(3) は同値であることを示せ．
(1) f は連続である．
(2) 任意の連続写像 $g\colon Y \to \mathbb{S}$ に対し，合成写像 $g \circ f\colon X \to \mathbb{S}$ は連続である．
(3) 任意の位相空間 Z と任意の連続写像 $g\colon Y \to Z$ に対し，合成写像 $g \circ f\colon X \to Z$ は連続である．
2. 連続写像 $f\colon X \to Y$ に対し，次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．
(1) f は同相写像である．
(2) 任意の位相空間 T に対し，写像 $f_*\colon C(T,X) \to C(T,Y)$ は可逆である．

4.3 閉集合，近傍，閉包

位相空間について，よく使われる用語を定義する．

定義 4.3.1 X を位相空間とし，A を X の部分集合とする．

1. A の補集合 $X \setminus A$ が X の開集合であるとき，A は X の**閉集合**であるという．
2. x を X の点とする．A が x の開近傍を部分集合として含むとき，A は x の**近傍**であるといい，x は A の**内点** (interior point) であるという．
3. A の部分集合

$$\overline{A} = \{x \in X \mid x \text{ の任意の近傍 } U \text{ に対し } U \cap A \neq \emptyset\}$$

を A の**閉包** (closure) とよぶ．

$$A^\circ = \{x \in A \mid x \text{ は } A \text{ の内点である }\}$$

を A の**内部** (interior) という．

4. $X = \overline{A}$ であるとき，A は**稠密**(ちゅうみつ) (dense) であるという．

5. $A \subset U$ をみたす開集合 U を A の**開近傍**という．□

閉集合のことを，閉部分集合ともいう．閉集合を部分空間と考えたものを，閉部分空間という．A が開集合であるとは，A が，A の任意の点の近傍であることである．系 3.1.3.2. より，$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ は稠密である．開集合の補集合のことを閉集合というのであって，開集合でない集合のことを閉集合というのではない．

A を位相空間 X の部分集合とする．$X \supset \overline{A} \supset A^\circ$ だから，X は，閉集合 $\overline{A} \setminus A^\circ$ と開集合 A°，$X \setminus \overline{A}$ に分割される．閉集合 $\overline{A} \setminus A^\circ$ を A の**境界** (boundary) とよび，その点を A の**境界点**とよぶ．開集合 $X \setminus \overline{A}$ を A の**外部** (exterior) とよび，その点を A の**外点**とよぶ．A の内部のことを A の**開核** (open kernel) ともよぶ．A の閉包の点のことを，A の触点とよぶこともある．

よりみち 68　x の近傍とは，x にある程度近い X の点は全部含むような集合である．x の近傍というと，x に近い点だけからなるような感じがするが，X の部分集合は，大きければ大きいほど近傍になりやすい．たとえば，X は，X の任意の点の近傍である．

A の内部を表わす記号は，定着したものがないようである．この本では A° で表わすことにする．

命題 4.3.2　X を位相空間とし，A を X の部分集合とする．

1. A の内部 A° は X の開集合であり，$A^\circ \subset A$ である．A° は A に部分集合として含まれる開集合のうちで最大のものである．

2. A の閉包 $\overline{A}$ は X の閉集合であり，$A \subset \overline{A}$ である．$\overline{A}$ は A を部分集合として含む閉集合のうちで最小のものである．

3. 次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) A は稠密である．

(2) 空でない任意の開集合 U に対し，$A \cap U \neq \emptyset$ である．□

証明 1. A° の定義より，$A^\circ \subset A$ である．$\mathcal{U}_A = \{U \in \mathcal{O} \mid U \subset A\}$ とおくと，$A^\circ = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_A} U$ である．よって，A° は開集合であり，$U \in \mathcal{U}_A$ ならば $U \subset A^\circ$ である．

2. $B = X \setminus A$ とおけば，$\overline{A} = X \setminus B^\circ$ である．よって，1. よりしたがう．

3. (1)⇒(2): U を空でない開集合とし，$x \in U$ とする．$\overline{A} = X$ とすると，$x \in \overline{A}$ であり，U は x の近傍だから，$A \cap U \neq \emptyset$ である．

(2)⇒(1): x を X の任意の点とする．U を x の任意の開近傍とすると，$U \cap A \neq \emptyset$ だから，$x \in \overline{A}$ である．■

位相空間 X の部分集合 A に対し，A が開集合であるとは $A = A^\circ$ ということであり，A が閉集合であるとは $A = \overline{A}$ ということである．

命題 4.3.3 $A \subset \mathbb{R}$ を上に有界な空でない部分集合とする．実数 s に対し，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) s は A の上限である．

(2) $s \in \overline{A} \subset (-\infty, s]$ である．□

証明 (1)⇒(2): U を s の開近傍とする．実数 $r > 0$ で，$U_r(s) \subset U$ をみたすものが存在する．s は A の上界だから $A = A \cap (-\infty, s]$ であり，$s - r$ は A の上界ではないから $A \cap (s - r, \infty)$ は空でない．よって，$A \cap (s - r, s] = A \cap (-\infty, s] \cap (s - r, \infty) = A \cap (s - r, \infty)$ は空でなく，$A \cap (s - r, s] \subset A \cap U_r(s) \subset A \cap U$ も空でない．U は任意の開近傍だから，$s \in \overline{A}$ である．

$(-\infty, s]$ は $\mathbb{R}$ の閉集合で $A \subset (-\infty, s]$ だから $\overline{A} \subset (-\infty, s]$ である．

(2)⇒(1): $A \subset \overline{A} \subset (-\infty, s]$ だから，s は A の上界である．任意の実数 $t < s$ に対し，$r = s - t > 0$ とおくと，$U_r(s)$ は s の開近傍だから，$s \in \overline{A}$ より，$U_r(s) \cap A \neq \emptyset$ である．$U_r(s) \cap A = (s - r, s + r) \cap A \subset (t, \infty) \cap A \neq \emptyset$ だから，t は A の上界でない．よって s は A の上限である．■

写像の連続性の定義を，閉集合や閉包を使っていいかえる．

命題 4.3.4 X と Y を位相空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ について，次の条

件 (1)–(3) は同値である．

(1) f は連続である．

(2) Y の任意の閉集合 B に対し，逆像 $f^{-1}(B)$ は X の閉集合である．

(3) X の任意の部分集合 A に対し，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ である． □

証明　(1)⇔(2): Y の開集合 V を考えることと，閉集合 $B = Y \setminus V$ を考えることは同じことである．$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(V)$ だから，$f^{-1}(V)$ が開集合であることと，$f^{-1}(B)$ が閉集合であることは，同値である．

(2)⇒(3): $f(A) \subset \overline{f(A)}$ だから，$A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ である．$f^{-1}(\overline{f(A)})$ は閉集合だから，$\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ であり，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ である．

(3)⇒(2): B を Y の閉集合とし，$A = f^{-1}(B)$ とおく．$f(A) \subset B$ だから，$\overline{f(A)} \subset B$ となり，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset B$ である．よって，$\overline{A} \subset f^{-1}(B) = A$ である．$A \subset \overline{A}$ だから，$A = \overline{A}$ であり，A は閉集合である． ■

開集合系の基底や，開近傍の基本系を定義する．

定義 4.3.5　X を位相空間とし，$\mathcal{U}$ を X の開集合系 $\mathcal{O}$ の部分集合とする．

1. $\mathcal{U}$ が $\mathcal{O}$ の**基底** (basis) であるとは，X の任意の開集合 U と任意の $x \in U$ に対し，$V \in \mathcal{U}$ で $x \in V \subset U$ をみたすものが存在することをいう．

2. $x \in X$ とする．$\mathcal{U}$ が x の開近傍の**基本系** (fundamental system) であるとは，$V \in \mathcal{U}$ なら V は x の開近傍であり，x の任意の開近傍 U に対し $V \subset U$ をみたす元 $V \in \mathcal{U}$ が存在することをいう． □

$x \in X$ の近傍の集合が近傍の基本系であることも同様に定義する．近傍の基本系を**基本近傍系**ともいう．$X = \mathbb{R}^n$ とすると，$\mathcal{U} = \{U_r(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である．さらに，$x \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\mathcal{U}_x = \{U_r(x) \mid r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ は x の開近傍の基本系である．

よりみち 69　線形空間の基底とは違い，開集合系の基底については元の個数の一意性はなりたたない．

開近傍の基本系で写像の連続性を表わすと，次のようになる．

命題 4.3.6 X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．$\mathcal{U}_a$ を $a \in X$ の開近傍の基本系，$\mathcal{V}_b$ を $b = f(a) \in Y$ の開近傍の基本系とすると，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) f は a で連続である．

(2) 任意の $V \in \mathcal{V}_b$ に対し，$f(U) \subset V$ をみたす $U \in \mathcal{U}_a$ が存在する． □

証明 (1)⇒(2): $V \in \mathcal{V}_b$ とする．f が a で連続なら，$f(W) \subset V$ をみたす a の開近傍 W が存在する．$U \subset W$ をみたす $U \in \mathcal{U}_a$ が存在し，$f(U) \subset f(W) \subset V$ である．

(2)⇒(1): W を b の開近傍とする．$V \subset W$ をみたす $V \in \mathcal{V}_b$ が存在し，(2) より，$f(U) \subset V$ をみたす $U \in \mathcal{U}_a$ が存在し，$f(U) \subset V \subset W$ である． ■

定義 4.3.7 X を位相空間とする．開集合の族 $(U_i)_{i \in I}$ が $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ をみたすとき，$(U_i)_{i \in I}$ は X の**開被覆** (open covering) であるという． □

$(U_i)_{i \in I}$ が X の開被覆であることを，$X = \bigcup_{i \in I} U_i$ が開被覆であるということもある．$\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ が開被覆であるということもある．

よりみち 70 位相空間 X に対し，その開被覆 $(U_i)_{i \in I}$ を考えると，1 つ 1 つの開集合 U_i は，もとの空間 X よりも簡単なことがよくある．そのようなときに，まずそれぞれの開集合を調べて，次にそれを総合して全体の性質を調べる方法がよく使われる．層とそのコホモロジーは，この方法の典型的な例である．

それぞれの開集合について調べることを，**局所的** (local) に調べるという．これに対し，X 全体の性質を，**大域的** (global) 性質という．

定義 4.3.8 X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

1. 任意の開集合 $U \subset X$ に対し，$f(U) \subset Y$ が開集合であるとき，f は**開写像** (open mapping) であるという．

2. 任意の閉集合 $A \subset X$ に対し，$f(A) \subset Y$ が閉集合であるとき，f は**閉写像** (closed mapping) であるという． □

$f\colon X \to Y$ がうめこみで，$f(X)$ が Y の開集合であるとき，f は開うめこみであるという．連続単射に対しては，開うめこみであるための条件は，開写像であることである．とくに，U が X の開部分空間ならば，包含写像 $i\colon U \to X$ は開写像である．$\mathbb{C}$ の連結な開集合上定義された，定数でない正則関数は開写像である（補題 6.6.6.2.）．

同様に，$f\colon X \to Y$ がうめこみで，$f(X)$ が Y の閉集合であるとき，f は閉うめこみであるという．連続単射に対しては，閉うめこみであるための条件は，閉写像であることである．A が X の閉部分空間ならば，包含写像 $i\colon A \to X$ は閉写像である．閉写像は，第 6 章でコンパクト空間を調べるときに，重要な役割をはたす．

連続写像は開写像とは限らないし，開写像が連続写像であるとも限らない．閉写像についても同様である．

まとめ

・開集合の補集合を，閉集合という．部分集合の閉包とは，その部分集合を含む最小の閉集合である．

・位相空間の点の近傍とは，その点を含む開集合を部分集合として含む集合のことである．

・開集合系の基底や，開近傍の基本系を定義した．

問題

A 4.3.1 $a < b$ を実数とする．

1. 半開区間 $[a, b)$ の閉包 $\overline{[a, b)}$ は，閉区間 $[a, b]$ であることを示せ．
2. 内部 $[a, b)^{\circ}$ は，開区間 (a, b) であることを示せ．

A 4.3.2 $n \geq 0$ を自然数とする．

1. 開球 $U_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ の閉包 $\overline{U_1(0)}$ は，閉球 $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ であることを示せ．
2. 閉円板 $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ の内部 $(D^n)^{\circ}$ は，開球 $U_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ であることを示せ．

A 4.3.3 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を収束する実数列とし，$b = \lim_{n \to \infty} a_n$ とおく．$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ の閉包は $A \cup \{b\}$ であることを示せ．

A 4.3.4 $\mathbb{R}$ の部分集合 A で，7 つの集合 A, A°, $\overline{A}$, $\overline{A^\circ}$, $(\overline{A})^\circ$, $(\overline{A^\circ})^\circ$, $\overline{(\overline{A})^\circ}$ が，すべて相異（あいこと）なるものの例を 1 つ求めよ．

A 4.3.5 射影 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は，閉写像でないことを示せ．

A 4.3.6 X を位相空間とする．X の部分集合 A について，次の条件 (1)–(3) は同値であることを示せ．

(1) A は，$\overline{A}$ の開集合である．

(2) $A = U \cap F$ をみたす X の開集合 U と X の閉集合 F が存在する．

(3) A の任意の点 x に対し，x の開近傍 U で，$A \cap U$ が U の閉集合となるものが存在する．

よりみち 71 問題 4.3.6 の条件をみたす部分集合 A を，X の**局所閉集合** (locally closed set) という．

AP 4.3.7 X を位相空間とし，A, B を X の部分集合とする．

1\. 次の条件 (1)–(4) がなりたつことを示せ．

(1) $\overline{A} \supset A$.

(2) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2\. $X = \mathbb{R}$ とする．$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ がなりたたない部分集合 A, B の例を 1 つあげよ．

AP 4.3.8 X を位相空間とし，$x \in X$ とする．次の条件 (1)–(5) がなりたつことを示せ．

(1) X は x の近傍である．

(2) V が x の近傍ならば，$x \in V$ である．

(3) V が x の近傍で，$V \subset W \subset X$ ならば，W も x の近傍である．

(4) V と W が x の近傍ならば，$V \cap W$ も x の近傍である．

(5) V が x の近傍ならば，x の近傍 W で，任意の $y \in W$ に対し，V が y の近傍であるものが存在する．

AP 4.3.9 X を位相空間とする．開集合系 $\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{U}$ を $\mathcal{O}$ の基底とする．次の条件 (1) と (2) がなりたつことを示せ．

(1) $U, V \in \mathcal{U}$ かつ $x \in U \cap V$ ならば，$W \in \mathcal{U}$ で $x \in W \subset U \cap V$ をみたすものが存在する．

(2) 任意の $x \in X$ に対し，$x \in U$ をみたす $U \in \mathcal{U}$ が存在する．

よりみち 72 問題 4.3.7.1, 4.3.8, 4.3.9 の条件は，どれも開集合の公理と同等な条件

であり，それらを公理として位相空間の定義をすることができるものである．それぞれを，閉包の公理，近傍系の公理，開集合系の基底の公理とよぶ．この本では，このことについてはこれ以上ふれない．

第 5 章 位相空間の構成

この章では，位相空間の構成法を解説する．まず 5.1 節で，巾集合の部分集合によって生成される位相を，構成する．5.2 節では，集合上の距離を定義し，距離が定める位相を定義する．距離空間の位相は，第 3 章で定義した $\mathbb{R}^n$ の位相の直接の一般化である．位相空間のだいじな例が，距離空間として数多く構成される．

5.3 節では，位相空間の積空間に位相を定義し，その性質や例を解説する．積位相や部分空間の相対位相を特別な場合として含む誘導位相も，定義する．5.4 節では，像位相の重要な例である商位相などを調べ，誘導位相と双対的な性質をみたすことなどを解説する．

5.1 生成される位相

集合 X の巾集合 $P(X)$ の部分集合 $\mathcal{U}$ に対し，$\mathcal{U}$ の元がすべて開集合になるようなもっとも粗い位相が定まる．

命題 5.1.1 X を集合とする．$\mathcal{U}$ を巾集合 $P(X)$ の部分集合とする．

1.

$$\mathcal{O}_{\mathcal{U}} = \left\{ U \in P(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in U \text{ ならば，} \mathcal{U} \text{ の元の有限族 } (U_i)_{i \in I} \text{ で} \\ x \in \bigcap_{i \in I} U_i \subset U \text{ をみたすものが存在する} \end{array} \right\}$$

は X の位相であり，$\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ である．

2. X の位相 $\mathcal{O}$ について，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{O}$ より粗い．

(2) $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ である． □

証明 1. $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ が，開集合の公理をいいかえた命題 4.1.3 の条件をみたすことを確かめる．U を X の部分集合とし，$x \in U$ ならば $x \in V \subset U$ をみたす $V \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ が存在するとする．このとき，$\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ の定義より $\mathcal{U}$ の元の有限族 $(U_i)_{i\in I}$ で $x \in \bigcap_{i\in I} U_i \subset V$ をみたすものが存在するから，$U \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ である．よって，開集合の公理 (1) がみたされる．

$(U_i)_{i\in\emptyset}$ を $\mathcal{U}$ の元の空な族とすると，任意の $x \in X$ に対し，$x \in \bigcap_{i\in\emptyset} U_i = X$ である．よって，$X \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ である．$U, V \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ とする．$x \in U \cap V$ とすると，$\mathcal{U}$ の元の有限族 $(U_i)_{i\in I}$ と $(V_j)_{j\in J}$ で，$x \in \bigcap_{i\in I} U_i \subset U$ と $x \in \bigcap_{j\in J} V_j \subset V$ をみたすものがある．有限集合 K を $K = I \amalg J$ で定義し，I, J を K の部分集合と同一視する．$\mathcal{U}$ の元の有限族 $(W_k)_{k\in K}$ を，$k = i \in I \subset K$ なら $W_k = U_i$, $k = j \in J \subset K$ なら $W_k = V_j$ で定めると，$x \in \bigcap_{i\in I} U_i \cap \bigcap_{j\in J} V_j = \bigcap_{k\in K} W_k \subset U \cap V$ である．よって，$U \cap V \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ であり，$\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ は開集合の公理 (2) もみたす．

$U \in \mathcal{U}$ ならば，U だけからなる族を考えれば $U \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ である．よって，$\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ である．

2. (1)⇒(2): $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ だから，$\mathcal{O}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{O}$ ならば $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ である．

(2)⇒(1): $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ ならば，$\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ の定義と命題 4.1.3.1. より，$\mathcal{O}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{O}$ である． ■

命題 5.1.1.2. は，$\mathcal{U}$ の元がすべて開集合になるように X の位相を定めようとすれば，$\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ の元は必ず開集合になるということである．一方，命題 5.1.1.1. は，$\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ は確かに X の位相を定めているということである．

定義 5.1.2 X を集合とする．$\mathcal{U} \subset P(X)$ に対し，命題 5.1.1.1. で定義した X の位相 $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ を，$\mathcal{U}$ によって**生成される位相**という． □

命題 5.1.1.2. より，$\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ を，$\mathcal{U}$ の元をすべて開集合にするもっとも粗い位相ともよぶ．$\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{U}$ が $\mathcal{O}$ の基底ならば，$\mathcal{U} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ だから，$\mathcal{O}$ は $\mathcal{U}$ によって生成される位相 $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ と等しい．$\mathcal{O}$ が $\mathcal{U}$ によって生成される位相であるとき，$\mathcal{U}$ は $\mathcal{O}$ の**準基** (subbasis) であるという．

【例 5.1.3】 X の離散位相は，$\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ で生成される位相である．X の密着位相は，$\mathcal{U} = \emptyset$ で生成される位相である．$\mathbb{S}$ の位相は，$\mathcal{U} = \{\{1\}\}$

で生成される位相である．

$\mathbb{R}^n$ の位相は $\mathcal{U} = \{U_r(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, r \in (0, \infty)\}$ によって生成される位相である（命題 5.2.3）．

よりみち 73　生成ということばは，いつも受身で使う習慣がある．$\mathcal{U}$ が生成する位相とはいわないらしい．

$\mathcal{U}$ によって生成される位相について，次の性質がなりたつ．

命題 5.1.4　1. X を集合とし，$\mathcal{U}$ を巾集合 $P(X)$ の部分集合とする．$\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ を $\mathcal{U}$ によって生成される位相とし，X を $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ によって位相空間と考える．このとき，任意の位相空間 T と任意の写像 $f\colon T \to X$ について，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) f は連続である．

(2) 任意の $U \in \mathcal{U}$ に対し，逆像 $f^{-1}(U)$ は T の開集合である．

2. $\mathbb{R}$ の位相は，合併 $\{(-\infty, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, \infty) \mid t \in \mathbb{R}\}$ で生成される位相である．□

証明　1. f による像位相を $\mathcal{O}$ とする．命題 4.2.2.1. より，(1) は $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{O}$ ということである．(2) は $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ ということだから，命題 5.1.1.2. よりしたがう．

2. $\mathbb{R}$ の位相を $\mathcal{O}$ とし，$\mathcal{U} = \{(-\infty, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, \infty) \mid t \in \mathbb{R}\}$ によって生成される位相を $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ とする．$\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ だから $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{O}$ である．$U \in \mathcal{O}$ とし，$x \in U$ とすると $x \in U_r(x) = (-\infty, x + r) \cap (x - r, \infty) \subset U$ をみたす実数 $r > 0$ が存在するから，$U \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ である．よって $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ である．■

$\mathbb{R}$ の部分集合の集合 $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset P(\mathbb{R})$ を，$\mathcal{U} = \{(-\infty, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{V} = \{[s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ で定める．$\mathbb{R}$ を，$\mathcal{U}, \mathcal{V}$ によって生成される位相によって位相空間と考えたものを，それぞれ $\mathbb{R}_{\mathcal{U}}, \mathbb{R}_{\mathcal{V}}$ で表わす．$\mathcal{U}$ によって生成される位相は，$\mathcal{U} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ である．X を位相空間とする．関数 $f\colon X \to \mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ が連続であるとき，f は**上**（じょう）**半連続** (upper semi-continuous) であるという．A を $\mathbb{R}_{\mathcal{V}}$ の部分空間とし，$a \in A$ とする．写像 $f\colon A \to X$ が a で連続であるとき，f は a で**右連続** (right continuous) であるという．下（か）半連続関数や，左連続写像も同様に

定義する.

系 5.1.5 X を位相空間とする. 関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ に対し, 次の条件 (1) と (2) は同値である.

(1) f は連続である.

(2) f は上半連続であり, 下半連続である. □

証明 命題 5.1.4 より, どちらも, 任意の実数 t に対し $\{x \in X \mid f(x) < t\}$ と $\{x \in X \mid f(x) > t\}$ が X の開集合であることと, 同値である. ■

> まとめ
> ・開集合にしたい集合を指定することで, 位相が定まる.

問題

A 5.1.1 X を位相空間とする.

1. 関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ に対し, 次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ.

(1) f は上半連続である.

(2) 任意の $a \in X$ と任意の実数 $r > 0$ に対し, a の開近傍 U で, $U \subset \{x \in X \mid f(x) < f(a) + r\}$ をみたすものが存在する.

2. $(f_i)_{i\in I}$ を上半連続関数 $f_i\colon X \to \mathbb{R}$ の族とし, 任意の $x \in X$ に対し $\inf_{i\in I} f_i(x)$ が存在するとする. 関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \inf_{i\in I} f_i(x)$ で定めると, f も上半連続であることを示せ.

3. 上半連続関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で, 連続関数ではないものの例を 1 つあげよ.

A 5.1.2 X を集合とし, $\mathcal{U}$ を巾集合 $P(X)$ の部分集合とする. $\mathcal{U}' = \{U_1 \cap \cdots \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}, U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}\}$ は, $\mathcal{U}$ によって生成される位相 $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ の基底であることを示せ.

5.2 距離空間

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の距離は, 命題 3.2.2 の性質をみたす. これを抽象化して, 一般の集合の距離を定義する. ユークリッド空間の場合と同様にして, 距離が定められた空間に, 位相を定義することができる.

定義 5.2.1 X を集合とする．

1. 関数 $d\colon X \times X \to [0,\infty) \subset \mathbb{R}$ が次の条件 (1)–(3) をみたすとき，d は X の**距離** (distance, metric) であるという．

(1) 任意の $x,y \in X$ に対し，$d(x,y)=0$ は $x=y$ と同値である．

(2) 任意の $x,y \in X$ に対し，$d(x,y)=d(y,x)$ である．

(3) 任意の $x,y,z \in X$ に対し，$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ である．

2. d を X の距離とする．$a \in X$ と実数 $r>0$ に対し，$U_r(a)=\{x \in X \mid d(x,a)<r\}$ を，a を中心とする半径 r の**開球**とよぶ．

$\{U_r(x) \mid x \in X, r>0\} \subset P(X)$ で生成される位相を，d が**定める位相**という．

X の部分集合 A が**有界**であるとは，$\mathbb{R}$ の部分集合 $\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$ が有界であることをいう．A が有界であるとき，$d(A)=\sup\limits_{x,y\in A} d(x,y) \in [0,\infty)$ を，A の**直径** (diameter) という．

3. d_1 と d_2 を X の距離とする．d_1 の定める X の位相と d_2 の定める X の位相が等しいとき，d_1 と d_2 は**同値**であるという． □

よりみち 74 X の距離 d_1, d_2 が同値であるということを，もっと強い条件で定義することもあるので，注意する必要がある．

定義 5.2.1.1. の条件 (1)−(3) を，**距離の公理**という．3.2 節で定めた $\mathbb{R}^n$ の距離は，距離の公理をみたす．集合 X と X の距離 d の対 (X,d) を，**距離空間** (metric space) とよぶ．位相空間と同様に，距離空間も d を省略して，単に X で表わすのがふつうである．(X,d) が距離空間であるとき，距離 d が定める位相について，X を位相空間と考える．任意の集合 X に対し，$X \times X \setminus \Delta_X$ の特性関数 $X \times X \to \{0,1\} \subset \mathbb{R}$ は，X の距離である．この距離が定める X の位相は，離散位相である．$a \in X$ とし，$r>0$ を実数とすると，開球 $U_r(a)$ は a の開近傍であり，$U_r(a)$ の直径は $2r$ 以下である．実数 $\varepsilon>0$ に対し，$U_\varepsilon(a)$ を a の ε **近傍**ともよぶ．

【例 5.2.2】 X を，閉区間 $[0,1]$ 上で定義された連続関数全体の空間 $C([0,1])$ とする．連続関数 $f,g \in C([0,1])$ に対し，$d_\infty(f,g)=\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$，$d_1(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$ とおくと，d_∞, d_1 はどちらも X の距

離を定める．$d_1(f,g) \leq d_\infty(f,g)$ より，d_∞ の定める位相 $\mathcal{O}_\infty$ は d_1 の定める位相 $\mathcal{O}_1$ より細かいことがしたがう（系 5.2.5.1.）．$\mathcal{O}_\infty$ と $\mathcal{O}_1$ は等しくなく (問題 8.2.2)，d_∞ と d_1 は同値でない．

命題 5.2.3　X を距離空間とする．X の部分集合 U について，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) U は，距離 d が定める位相について，X の開集合である．

(2) $x \in U$ なら，$U_r(x) \subset U$ をみたす実数 $r > 0$ が存在する．　□

証明　距離 d が定める位相の定義より，(2)⇒(1) である．U が条件 (1) をみたすとする．$x \in U$ ならば，距離 d が定める位相の定義より，X の元 $x_1, \ldots, x_n$ と実数 $r_1, \ldots, r_n > 0$ で，$x \in U_{r_1}(x_1) \cap \cdots \cap U_{r_n}(x_n) \subset U$ をみたすものがある．$r_1 - d(x, x_1), \ldots, r_n - d(x, x_n) > 0$ だから，$r = \min(1, r_1 - d(x, x_1), \ldots, r_n - d(x, x_n)) > 0$ とおけば，$U_r(x) \subset U_{r_1}(x_1) \cap \cdots \cap U_{r_n}(x_n) \subset U$ である．　■

命題 5.2.3 より，$\mathbb{R}^n$ の位相は $\mathbb{R}^n$ の距離が定める位相である．命題 5.2.3 は，$x \in X$ に対し，$\mathcal{U}_x = \{U_r(x) \mid r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ は x の開近傍の基本系であるということである．

命題 3.3.3.1. と同様に，距離空間の間の写像の連続性は，ε-δ 論法で判定できる．

命題 5.2.4　X と Y を距離空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．$a \in X$ に対し，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) f は a で連続である．

(2) 任意の実数 $q > 0$ に対し，実数 $r > 0$ で $f(U_r(a)) \subset U_q(f(a))$ をみたすものが存在する．　□

証明　$\mathcal{U}_a = \{U_r(a) \mid r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ と $\mathcal{V}_b = \{U_q(b) \mid q \in \mathbb{R}, q > 0\}$ は，それぞれ a と $b = f(a)$ の開近傍の基本系だから，命題 4.3.6 からしたがう．　■

系 5.2.5　1.　X, Y を距離空間とし，d_X と d_Y でそれぞれの距離を表わす．$f\colon X \to Y$ を写像とする．実数 $c > 0$ で，任意の $x, x' \in X$ に対し

$d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x')$ をみたすものがあるならば，f は連続である．

2. d_1 と d_2 を X の距離とする．実数 $c_1, c_2 > 0$ で，任意の $x, y \in X$ に対し $c_1 \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 \cdot d_1(x, y)$ をみたすものがあれば，d_1 と d_2 は同値である． □

証明 1. $r = \frac{q}{c}$ とおけば，$d_X(x, x') < r$ ならば，$d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x') < q$ である．

2. $d_2(x, y) \leq c_2 \cdot d_1(x, y)$ より，X の恒等写像は d_1 が定める距離空間 X_1 から d_2 が定める距離空間 X_2 への連続写像である．同様に $\mathrm{id}_X \colon X_2 \to X_1$ も連続だから，同相写像である． ■

A を距離空間 X の空でない部分集合とする．$x \in X$ に対し，$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) \in [0, \infty)$ とおく．$d(x, A)$ を，点 x の A からの距離とよぶことがある．

命題 5.2.6 X を距離空間とし，A をその空でない部分集合とする．$x \in X$ に対し $d(x, A) \in \mathbb{R}$ を対応させる関数を，$d(\ , A) \colon X \to \mathbb{R}$ とする．

1. $x, y \in X$ に対し，$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ がなりたつ．関数 $d(\ , A) \colon X \to \mathbb{R}$ は，連続である．

2. $\overline{A}$ を A の閉包とすると，$\overline{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ である． □

証明 1. $x, y \in X$ と $a \in A$ に対し，$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ である．両辺の下限をとれば，$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ であり，$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ である．同様に $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ だから，

$$|d(x, A) - d(y, A)| = \max(d(x, A) - d(y, A), d(y, A) - d(x, A)) \leq d(x, y) \quad (5.1)$$

である．系 5.2.5.1. より，関数 $d(\ , A)$ は連続である．

2. 命題 5.2.3 より，$\overline{A} = \{x \in X \mid 任意の\ r > 0\ に対し\ U_r(x) \cap A \neq \emptyset\}$ である．この右辺は，$\{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ である． ■

式 (5.1) で $A = \{a\}$ とおけば，

$$|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y) \quad (5.2)$$

が得られる．

定義 5.2.7　X と Y を距離空間とし，d_X と d_Y でそれぞれ X と Y の距離を表わす．$f\colon X \to Y$ を写像とする．任意の $x, x' \in X$ に対し $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ であるとき，f は**等長写像** (isometry) であるという．□

等長写像を，等距離写像とよぶこともある．

X を距離空間とし，A を X の部分集合とする．X の距離 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ の $A \times A$ への制限 $d_A\colon A \times A \to \mathbb{R}$ により A を距離空間と考えるとき，A を X の**部分距離空間**という．$\mathbb{R}^n$ の部分空間は，このようにして距離空間と考えることができる．包含写像 $A \to X$ は等長写像だから，次の命題 5.2.8 よりうめこみである．

命題 5.2.8　1. X と Y を距離空間とする．$f\colon X \to Y$ が等長写像ならば，f はうめこみである．

2. X を距離空間とし，A を部分距離空間とする．A の距離空間としての位相は，X の部分空間としての位相と等しい．□

証明　1. X の距離を d_X で，Y の距離を d_Y で表わす．系 5.2.5.1. より，$f\colon X \to Y$ は連続である．$f(x) = f(x')$ とすると，$d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x')) = 0$ であり，$x = x'$ だから，f は単射である．

$\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ を X と Y の位相とし，$\mathcal{U}_X = \{U_r(x) \mid x \in X, r > 0\}$，$f^*\mathcal{U}_Y = \{f^{-1}(U_r(y)) \mid y \in Y,\ r > 0\}$ とおく．$\mathcal{U}_X \subset f^*\mathcal{U}_Y \subset f^*\mathcal{O}_Y$ だから，$\mathcal{O}_X \subset f^*\mathcal{O}_Y$ である．f は連続だから，$\mathcal{O}_X \supset f^*\mathcal{O}_Y$ である．

2. 包含写像 $A \to X$ に 1. を適用すればよい．■

有限次元線形空間 $\mathbb{R}^n$ は距離空間である．無限次元 $\mathbb{R}$ 線形空間にもノルムを定めれば，距離空間と考えることができる．

定義 5.2.9　V を $\mathbb{R}$ 線形空間とする．関数 $\|\ \|\colon V \to \mathbb{R}$ が次の条件 (1)–(3) をみたすとき，$\|\ \|$ は V の**ノルム** (norm) であるという．

(1) 任意の $x \in V$ に対し，$\|x\| \geq 0$ である．$\|x\| = 0$ は，$x = 0$ と同値で

ある．

(2) 任意の $x \in V$ と $a \in \mathbb{R}$ に対し，$\|ax\| = |a|\|x\|$ である．

(3) 任意の $x, y \in V$ に対し，$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ である． □

$\|\ \|$ が $\mathbb{R}$ 線形空間 V のノルムならば，$x, y \in V$ に対し $d(x, y) = \|x - y\|$ とおくと，d は V の距離である．線形空間 V にノルムが指定されているとき，V を**ノルム空間** (normed space) とよぶ．V がノルム空間であるとき，ノルムが定める距離により，V を距離空間と考える．V が有限次元なら，V のノルムが定める位相はすべて等しいが，無限次元のときにはそうとは限らない（問題 8.2.2）．

【例 5.2.10】 1. X を集合とする．実数値関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ に対し，像 $f(X) \subset \mathbb{R}$ が有界であるとき，f は**有界**であるという．有界な実数値関数全体のなす $\mathbb{R}$ 線形空間 $\{f \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R}) \mid f$ は有界 $\}$ を $\widetilde{B}(X)$ で表わす．$f \in \widetilde{B}(X)$ に対し，$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \in [0, \infty)$ で定まる $\widetilde{B}(X)$ のノルム $\|\ \|_\infty$ を，**上限ノルム** (supremum norm) あるいは**一様ノルム** (uniform norm) とよぶ．上限ノルム $\|\ \|_\infty$ が定める $\widetilde{B}(X)$ の位相を，**一様収束** (uniform convergence) 位相という．

$X = \mathbb{N}$ のとき，$\widetilde{B}(\mathbb{N})$ は，数列の空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の部分空間 $\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_n)$ は有界 $\}$ である．これを l^∞ で表わす．$a = (a_n) \in l^\infty$ に対し，$\|a\|_\infty = \sup_n |a_n|$ である．

2. X を位相空間とすると，共通部分 $B(X) = \widetilde{B}(X) \cap C(X) = \{f \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R}) \mid f$ は有界かつ連続 $\}$ は，上限ノルムの制限により，ノルム空間である．

3. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ で定まる $C([0, 1])$ のノルム $\|\ \|_1$ を，$C([0, 1])$ の L^1 **ノルム** (L^1-norm) という． □

$\widetilde{B}(X)$ の部分集合の部分空間としての位相も，一様収束位相とよぶ．$\widetilde{B}(X)$ は，この本だけの記号である．

よりみち 75 このように，関数の空間に距離を定めることで，関数の空間も，$\mathbb{R}^n$ の部分集合と同様に，幾何的に扱うことができるようになる．このことが，位相を考える大きな動機となった．

命題 5.2.11 X を位相空間とし，$\widetilde{B}(X)$ を上限ノルムによりノルム空間と考える．$B(X) = \{f \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R}) \mid f$ は有界かつ連続 $\}$ は，$\widetilde{B}(X)$ の閉部分空間である． □

証明 関数 $f \in \widetilde{B}(X)$ が $B(X)$ の閉包の元であるとして，f が連続であることを示せばよい．任意の $g \in B(X)$ と任意の $x, a \in X$ に対し，

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| + |g(a) - f(a)| \\ &\leq 2\|f - g\|_\infty + |g(x) - g(a)|\end{aligned}$$

である．$q > 0$ を任意の実数とする．$g \in B(X) \cap U_{\frac{q}{2}}(f) \neq \emptyset$ とし，$r = q - 2\|f - g\|_\infty > 0$ とおけば，任意の $x \in g^{-1}(U_r(g(a)))$ に対し，

$$|f(x) - f(a)| \leq 2\|f - g\|_\infty + |g(x) - g(a)| < 2\|f - g\|_\infty + r = q$$

である．よって，$g^{-1}(U_r(g(a))) \subset f^{-1}(U_q(f(a)))$ であり，f は連続である． ■

まとめ

・$\mathbb{R}^n$ と同様に，距離が定められた空間には，位相が定まる．距離空間の間の連続写像は，ε-δ 論法で特徴づけられる．

・距離空間の部分空間の位相は，距離の制限が定める位相である．距離空間の部分集合からの距離は，連続関数を定める．

・線形空間にノルムを定めれば，距離空間になる．

・有界関数の空間には，上限ノルムで一様収束位相が定まる．有界連続関数のなす部分空間は，一様収束位相に関して閉集合である．

問題

A 5.2.1 X を集合とし，$F(X) = \{A \in P(X) \mid A$ は有限集合 $\}$ とおく．$A, B \in F(X)$ に対し $d(A, B)$ を $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ の元の個数と定めると，d は $F(X)$ の距離であることを示せ．d が定める $F(X)$ の位相は離散位相であることも示せ．

A 5.2.2 $x, y \in S^2$ に対し，$\delta(x, y)$ を，$\langle x, y \rangle = \cos\theta$ をみたすただ 1 つの実数 $\theta \in [0, \pi]$ とする．

1. δ は S^2 の距離であることを示せ.

2. 包含写像 $i\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ は, S^2 の距離 δ と $\mathbb{R}^3$ のふつうの距離 d に関して閉うめこみであることを示せ.

A 5.2.3 X を集合とし, d を距離とする. $M > 0$ を正の実数とする. $d^M\colon X \times X \to \mathbb{R}$ を, $d^M(x,y) = \min(d(x,y), M)$ で定める.

1. d^M は距離であることを示せ.

2. d^M は d と同値であることを示せ.

A 5.2.4 X を距離空間とする.

1. X の部分集合 U について, 次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ.

(1) U は開集合である.

(2) $U = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ をみたす連続関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ が存在する.

2. A と B を X の閉集合とし, $A \cap B = \emptyset$ とする. 連続関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ で, $A = f^{-1}(0)$, $B = f^{-1}(1)$ をみたすものが存在することを示せ.

B 5.2.5 $f\colon D^2 \to \mathbb{R}$ を有界な関数とする. $t \in [0,1]$ に対し, 関数 $g_t \in \widetilde{B}([0,2\pi])$ を, $g_t(x) = f(t\cos x, t\sin x)$ で定め, 写像 $g\colon [0,1] \to \widetilde{B}([0,2\pi])$ を, $g(t) = g_t$ で定める. 次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ.

(1) f は $(0,0)$ で連続である.

(2) $\widetilde{B}([0,2\pi])$ の一様収束位相に関して, $g\colon [0,1] \to \widetilde{B}([0,2\pi])$ は $t = 0$ で連続である.

B 5.2.6 X を集合とし, Y を距離空間とする. 写像 $f\colon X \to Y$ に対し, 関数 $D_f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ を, $D_f(x,y) = d(f(x), y)$ で定める. $\widetilde{B}(X,Y) = \{f \in \mathrm{Map}(X,Y) \mid f(X)$ は Y の有界部分集合 $\}$ とおく.

1. 写像 $D\colon \mathrm{Map}(X,Y) \to \mathrm{Map}(X \times Y, \mathbb{R})$ を, $D(f) = D_f$ で定める. D は単射であることを示せ.

2. $f, g \in \widetilde{B}(X,Y)$ とし, $d_{\sup}(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$ とおく. $D_f - D_g \in \widetilde{B}(X \times Y)$ であることを示せ. $\|D_f - D_g\|_\infty = d_{\sup}(f,g)$ であることも示し, $d_{\sup}$ は $\widetilde{B}(X,Y)$ の距離であることも示せ.

3. $\widetilde{B}(X,Y)$ を $d_{\sup}$ により距離空間と考える. $b \in Y$ とし, b で定値写像 $X \to Y$ も表わす. 写像 $\Delta_b\colon \widetilde{B}(X,Y) \to \widetilde{B}(X \times Y, \mathbb{R})$ を, $\Delta_b(f) = D_f - D_b$ で定めると, Δ_b は等長写像であることを示せ.

B 5.2.7 p を素数とする. 0 でない有理数 r を $r = p^e \frac{n}{m}$ (n と m は p と素) と表わしたとき, $e = v_p(r)$ とおく. 有理数 r に対し, $r \neq 0$ のとき $|r|_p = p^{-v_p(r)}$ とおき, $|0|_p = 0$ とおく.

1. $r, s \in \mathbb{Q}, r, s \neq 0$ に対し, $r + s \neq 0$ ならば $v_p(r+s) \geq \min(v_p(r), v_p(s))$ であることを示せ.

2. $x, y \in \mathbb{Q}$ に対し，$d_p(x, y) = |x - y|_p$ とおく．d_p は $\mathbb{Q}$ の距離を定めることを示せ．

よりみち 76　$\mathbb{Q}$ の距離 d_p を，p **進距離** (p-adic metric) という．

5.3　積位相と誘導位相

この節では，位相空間の族の積集合の位相を定義する．はじめに，2 つの位相空間の積に位相を定義する．

定義 5.3.1　$(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．$\mathcal{U} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X,\ V \in \mathcal{O}_Y\}$ によって生成される $X \times Y$ の位相を，$X \times Y$ の**積位相** (product topology) という．$X \times Y$ を，積位相により位相空間と考えたものを，X と Y の**積空間** (product space) とよぶ．□

積位相について，次がなりたつ．

命題 5.3.2　X と Y を位相空間とする．

1. $X \times Y$ の部分集合 W について，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) W は積位相に関して開集合である．

(2) W の任意の点 (x, y) に対して，x の開近傍 U と y の開近傍 V で，$U \times V \subset W$ をみたすものが存在する．

つまり，$\mathcal{U} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X,\ V \in \mathcal{O}_Y\}$ は，$X \times Y$ の積位相の基底である．

2. 任意の位相空間 T と任意の写像 $f\colon T \to X$, $g\colon T \to Y$ に対し，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) 積写像 $(f, g)\colon T \to X \times Y$ は連続である．

(2) $f\colon T \to X$ と $g\colon T \to Y$ は連続である．

3. 射影 $\mathrm{pr}_1\colon X \times Y \to X$ と $\mathrm{pr}_2\colon X \times Y \to Y$ は，連続な開写像である．□

証明　1. $U_1, \ldots, U_n$ を X の開集合，$V_1, \ldots, V_n$ を Y の開集合とすると，$(U_1 \times V_1) \cap \cdots \cap (U_n \times V_n) = (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \times (V_1 \cap \cdots \cap V_n)$ は $\mathcal{U}$ の元であ

る．よって，生成される位相の定義と，積位相の定義からしたがう．

2. 命題 5.1.4.1. より，(1) は，X の任意の開集合 U と Y の任意の開集合 V に対し，$(f\times g)^{-1}(U\times V)=f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)$ が T の開集合であることと同値である．よって (2) ならば (1) である．$V=Y$ と $U=X$ を考えれば，(1) ならば (2) である．

3. 積空間 $X\times Y$ の恒等写像に 2. を適用すれば，射影 $\mathrm{pr}_1\colon X\times Y\to X$ と $\mathrm{pr}_2\colon X\times Y\to Y$ は，連続である．

$W\subset X\times Y$ を開集合とし，$\mathrm{pr}_1(W)$ が X の開集合であることを示す．$x\in\mathrm{pr}_1(W)$ とすると，$(x,y)\in W$ をみたす $y\in Y$ がある．1. より，$U\times V\subset W$ をみたす x の開近傍 U と y の開近傍 V がある．$U\subset\mathrm{pr}_1(W)$ だから，$\mathrm{pr}_1(W)$ は X の開集合である．同様に，$\mathrm{pr}_2(W)$ も Y の開集合である． ■

$\mathcal{U}_x$ が $x\in X$ の開近傍の基本系で，$\mathcal{V}_y$ が $y\in Y$ の開近傍の基本系ならば，命題 5.3.2.1. より，$\{U\times V\mid (U,V)\in\mathcal{U}_x\times\mathcal{V}_y\}$ は $(x,y)\in X\times Y$ の開近傍の基本系である．A を X の部分空間，B を Y の部分空間とすると，積空間 $A\times B$ は積空間 $X\times Y$ の部分空間である．

$f\colon X\to X'$ と $g\colon Y\to Y'$ を連続写像とすると，$\mathrm{pr}_1\circ(f\times g)=f\circ\mathrm{pr}_1$ と $\mathrm{pr}_2\circ(f\times g)=g\circ\mathrm{pr}_2$ は連続だから，積写像 $f\times g\colon X\times Y\to X'\times Y'$ も連続である．命題 5.3.2.2. は，任意の位相空間 T について，標準写像 $C(T,X\times Y)\to C(T,X)\times C(T,Y)$ は可逆ということである．これを，積空間の**普遍性**という．

射影は閉写像とは限らない．任意の位相空間 Y に対し射影 $\mathrm{pr}_2\colon X\times Y\to Y$ が閉写像であるような位相空間 X を，コンパクト空間とよび，第 6 章でくわしく調べる．

距離空間の積空間の位相は，距離で定まる．

命題 5.3.3 X と Y を距離空間とし，X の距離を d_X で，Y の距離を d_Y で表わす．$(x,y),(x',y')\in X\times Y$ に対し，

$$
\begin{aligned}
d_1((x,y),(x',y'))&=d_X(x,x')+d_Y(y,y'),\\
d_2((x,y),(x',y'))&=\sqrt{d_X(x,x')^2+d_Y(y,y')^2},\\
d_\infty((x,y),(x',y'))&=\max(d_X(x,x'),d_Y(y,y'))
\end{aligned}
$$

とおく．d_1, d_2, d_∞ はどれも $X \times Y$ の距離であり，たがいに同値である．これらはすべて，$X \times Y$ の積位相を定める．□

証明　d_1, d_2, d_∞ が距離の公理の (1) と (2) をみたすことは明らかである．三角不等式を示す．実数 $a, b, c, a', b', c' \geq 0$ が $a \leq b+c, a' \leq b'+c'$ をみたすとして，

$$a + a' \leq (b + b') + (c + c'), \quad \sqrt{a^2 + a'^2} \leq \sqrt{b^2 + b'^2} + \sqrt{c^2 + c'^2},$$
$$\max(a, a') \leq \max(b, b') + \max(c, c')$$

を示せばよい．1 つめと 3 つめは明らかである．命題 3.2.2(3) より，$\sqrt{(b+c)^2 + (b'+c')^2} \leq \sqrt{b^2 + b'^2} + \sqrt{c^2 + c'^2}$ だから，2 つめもしたがう．

実数 $a, b \geq 0$ に対し，$\max(a, b) \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b \leq 2\max(a, b)$ だから，系 5.2.5.2. より，距離 d_1, d_2, d_∞ はすべてたがいに同値である．

$(a, b) \in X \times Y$ とする．$(U_r(a) \times U_s(b))_{r,s>0}$ は，命題 5.2.3 と命題 5.3.2.1. より，積位相に関して $(a, b) \in X \times Y$ の開近傍の基本系である．したがって，$(U_r(a) \times U_r(b))_{r>0}$ も開近傍の基本系である．距離 d_∞ に関して $U_r(a, b) = U_r(a) \times U_r(b)$ だから，d_∞ が定める位相は積位相である．■

系 5.3.4　X を距離空間とする．X の距離 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ は，d が定める位相の積位相について連続である．□

証明　$a, b, x, y \in X$ に対し，$|d(x, y) - d(a, b)| \leq |d(x, y) - d(a, y)| + |d(a, y) - d(a, b)| \leq d(x, a) + d(y, b) = d_1((x, y), (a, b))$ である．よって，$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ は d_1 が定める $X \times X$ の積位相について連続である．■

$X_1, \ldots, X_n$ が位相空間であるとき，$X_1 \times \cdots \times X_n$ の積位相を，n に関して帰納的に $X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$ と X_n の積位相として定める．命題 5.3.2.1. と n に関する帰納法により，

$$\mathcal{U} = \{U_1 \times \cdots \times U_n \mid \text{任意の } i = 1, \ldots, n \text{ に対し，} U_i \text{ は } X_i \text{ の開集合}\}$$

は，$X_1 \times \cdots \times X_n$ の積位相の基底であることが示される．

【例 5.3.5】 1. $\mathbb{R}^n$ の位相は，$\mathbb{R}$ の位相の積位相である．これは，命題 5.3.3 から，n に関する帰納法により示される．

2. 円周 S^1 の積空間 $(S^1)^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ を，n 次元**トーラス** (torus) とよび，T^n で表わす．

よりみち 77 $n \geq 2$ のときは，S^n と T^n は同相でない．このことを，この本の水準で示すのは難しいが，ホモロジー群を比較すれば簡単に証明できる．

加法 $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と乗法 $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は，積位相に関して連続である．行列の積 $M(m, n; \mathbb{R}) \times M(n, r; \mathbb{R}) \to M(m, r; \mathbb{R})$ も連続である．$r = 1$ とすれば，行列とベクトルの積 $M(m, n; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ も連続である．

位相空間の族の積の位相を定める．

定義 5.3.6 $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ を位相空間の族とし，X を積集合 $\prod_{i \in I} X_i$ とする．射影 $\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$ によるひきもどしの合併 $\bigcup_{i \in I} \mathrm{pr}_i^* \mathcal{O}_i$ によって生成される位相を，$X = \prod_{i \in I} X_i$ の**積位相**とよぶ．$X = \prod_{i \in I} X_i$ を，積位相により位相空間と考えたものを，$(X_i)_{i \in I}$ の**積空間**とよぶ．□

次の命題より，位相空間の有限族 $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ の積空間の積位相は，帰納的に定義した $X_1 \times \cdots \times X_n$ の積位相と一致する．

命題 5.3.7 $(X_i)_{i \in I}$ を位相空間の族とし，$X = \prod_{i \in I} X_i$ を積空間とする．

1. X の部分集合 U について，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) U は X の開集合である．

(2) $x = (x_i)_{i \in I} \in U$ ならば，$x_i \in X_i$ の開近傍の族 $(U_i)_{i \in I}$ で，$\{i \in I \mid U_i \subsetneqq X_i\}$ は有限集合であり $\prod_{i \in I} U_i \subset U$ をみたすものが存在する．

つまり，

$$\mathcal{U} = \left\{ \prod_{i \in I} U_i \;\middle|\; \begin{array}{l} (U_i)_{i \in I} \text{ は開集合 } U_i \subset X_i \text{ の族であり，} \\ \{i \in I \mid U_i \subsetneqq X_i\} \text{ は有限集合である} \end{array} \right\}$$

は積位相 $\mathcal{O}$ の基底である．

2. 任意の位相空間 T と任意の写像の族 $(g_i\colon T \to X_i)_{i \in I}$ に対し，次の条件

(1) と (2) は同値である．

(1) 積写像 $g = \prod_i g_i \colon T \to \prod_{i \in I} X_i$ は連続である．

(2) 任意の $i \in I$ に対し，$g_i \colon T \to X_i$ は連続である． □

命題 5.3.7.1. の $\mathcal{U}$ の定義の中の有限という条件は，命題 5.1.1.1. の $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ の定義の中の有限という条件に対応している．これらは，開集合の公理 (2) の中の有限という条件にもとづくものである．

証明　1. (2)⇒(1): $i \in I$ に対し，$\mathcal{O}_i$ を X_i の位相とする．$(U_i)_{i \in I}$ を開集合 $U_i \subset X_i$ の族とし，$J = \{i \in I \mid U_i \subsetneqq X_i\}$ は有限集合であるとすると，$\prod_{i \in I} U_i = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid i \in J \text{ ならば } x_i \in U_i\} = \bigcap_{i \in J} \mathrm{pr}_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{O}$ である．よって $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ であり，命題 4.1.3.1. より，(2)⇒(1) である．

(1)⇒(2): $j \in I, U \in \mathcal{O}_j$ に対し，$(U_i)_{i \in I}$ を $i \neq j$ ならば $U_i = X_i$ と $U_j = U$ で定めると，$\mathrm{pr}_j^{-1}(U) = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid x_j \in U\} = \prod_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}$ である．よって，$\bigcup_{i \in I} \mathrm{pr}_i^* \mathcal{O}_i \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ であり，積位相 $\mathcal{O}$ は $\mathcal{U}$ によって生成される位相である．$X = \prod_{i \in I} X_i \in \mathcal{U}$ であり，$(\prod_{i \in I} U_i) \cap (\prod_{i \in I} V_i) = \prod_{i \in I} (U_i \cap V_i)$ だから，$\mathcal{U}$ の元の有限族 $(W_j)_{j \in J}$ の共通部分 $\bigcap_{j \in J} W_j$ は $\mathcal{U}$ の元である．よって，(1)⇒(2) である．

2. $\mathcal{O}_T$ を T の位相とし，$i \in I$ に対し $\mathcal{O}_i$ を X_i の位相とする．命題 5.1.4.1. より，(1) は，$\{g^{-1}(U) \mid U \in \bigcup_{i \in I} \mathrm{pr}_i^* \mathcal{O}_i\} \subset \mathcal{O}_T$ ということである．左辺は $\bigcup_{i \in I} g_i^* \mathcal{O}_i$ だから，これは (2) と同値である． ■

位相空間 2 つの積の場合と同様に，$(A_i)_{i \in I}$ を $(X_i)_{i \in I}$ の部分空間の族とすると，積空間 $\prod_{i \in I} A_i$ は積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ の部分空間である．$(f_i \colon X_i \to Y_i)_{i \in I}$ を連続写像の族とし，$f \colon \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} Y_i$ を積写像とすると，任意の $i \in I$ に対し，$\mathrm{pr}_i \circ f = f_i \circ \mathrm{pr}_i$ は連続だから，f は連続である．$X = \prod_{i \in I} X_i$ を積空間とすると，命題 5.3.7.2. は，任意の位相空間 T について，標準写像 $C(T, X) \to \prod_{i \in I} C(T, X_i)$ は可逆ということである．これを，積空間の**普遍性**という．

I が有限集合でなければ，定数関数 $1 \colon I \to 2 = \{0, 1\}$ だけからなる集合 $\{1\} \subset \mathbb{S}^I$ は積位相に関して開集合ではない．このことは，第 6 章で，コンパクト空間の重要な性質である命題 6.4.1 を証明するときに使われる．

例題 5.3.8 $m \geq 2$ を自然数とする．$m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ を離散空間とし，無限積空間 $m^{\mathbb{N}}$ からの写像 $e_m \colon m^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ を，m 進小数展開 $e_m((x_n)) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{m^n}$ で定める．e_m は連続であることを示せ．

解答 自然数 n に対し，写像 $q_n \colon m^{\mathbb{N}} \to m^n$ を，$q_n((x_l)) = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ で定める．q_n は離散空間 m^n への連続写像であり，$x \in m^{\mathbb{N}}$ に対し，$V_n(x) = q_n^{-1}(q_n(x))$ は x の開近傍である．$x = (x_l) \in m^{\mathbb{N}}$ とすると，$e_m(V_n(x)) = \left[\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} \frac{x_l}{m^l}, \dfrac{1}{m}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{x_l}{m^l} + \frac{1}{m^n}\right]$ である．よって，実数 $r > 0$ に対し，n を $m^n \cdot r > 1$ をみたす最小の自然数とすると，任意の $x \in m^{\mathbb{N}}$ に対し，$e_m(V_n(x)) \subset U_r(e_m(x))$ である．したがって，e_m は連続である．

X を集合とし，Y を位相空間とする．写像 $X \to Y$ 全体のなす集合 $\mathrm{Map}(X, Y) = Y^X$ は，積位相により，位相空間と考えることができる．この位相を**単純収束** (simple convergence) 位相，あるいは**各点収束** (pointwise convergence) 位相とよぶ．**弱位相** (weak topology) とよぶこともある．$\mathrm{Map}(X, Y)$ の部分集合の相対位相も，単純収束位相とよぶ．

命題 5.3.9 X を集合とする．包含写像 $\widetilde{B}(X) \to \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ は，$\widetilde{B}(X)$ の一様収束位相と，$\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ の単純収束位相に関して，連続である． □

証明 任意の $x \in X$ に対し，値写像の $\widetilde{B}(X)$ への制限 $\mathrm{ev}_x|_{\widetilde{B}(X)} \colon \widetilde{B}(X) \to \mathbb{R}$ が連続であることを示せばよい．$f, g \in \widetilde{B}(X)$ とすると，$|\mathrm{ev}_x(f) - \mathrm{ev}_x(g)| = |f(x) - g(x)| \leq \|f - g\|_\infty$ である．よって，$\mathrm{ev}_x|_{\widetilde{B}(X)}$ は連続である． ■

X が有限集合なら，包含写像 $\widetilde{B}(X) \to \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ は同相写像である（例 5.3.5.1.）．X が無限集合なら，包含写像 $\widetilde{B}(X) \to \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ はうめこみではない（問題 8.4.5）．

積位相と相対位相の共通の一般化を定義する．

定義 5.3.10 X を集合とし，$(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ を位相空間の族，$(f_i \colon X \to X_i)_{i \in I}$ を写像の族とする．合併 $\bigcup_{i \in I} f_i^* \mathcal{O}_i$ によって生成される位相を，写像の族 $(f_i)_{i \in I}$ による**誘導位相** (induced topology) という． □

添字の集合が 1 つの元だけからなるときには，$f\colon X \to Y$ による誘導位相とは，f によるひきもどしのことである．$f\colon X \to Y$ がうめこみならば，X の位相は f による誘導位相である．とくに，部分空間の相対位相は，包含写像による誘導位相である．

命題 5.3.11　X を集合とする．$(X_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とし，$(f_i\colon X \to X_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．X を，写像の族 $(f_i)_{i\in I}$ による誘導位相によって位相空間と考える．

1. X の部分集合 U について，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) U は X の開集合である．

(2) $x \in U$ ならば，有限部分集合 $J \subset I$ と $f_i(x) \in X_i$ の開近傍の有限族 $(U_i)_{i\in J}$ で，$\bigcap_{i\in J} f_i^{-1}(U_i) \subset U$ をみたすものが存在する．

2. 任意の位相空間 T と任意の写像 $g\colon T \to X$ について，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) g は連続である．

(2) 任意の $i \in I$ に対し，合成写像 $f_i \circ g$ は連続である．　□

証明　命題 5.3.7 の証明と同様だから，省略する．　■

まとめ
- 積空間に積位相が定まる．
- 積位相や誘導位相について，普遍性がなりたつ．

問題

A 5.3.1　連続写像 $f\colon T^2 = S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$ を，$f((s,t),(u,v)) = (s\cdot(u+2), t\cdot(u+2), v)$ で定める．

1. f は，うめこみであることを示せ．

2. f の像は，xz 平面内の点 $(2,0,0)$ を中心とする半径 1 の円を，z 軸を中心に回転して得られる面であることを示し，$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2-4\sqrt{x^2+y^2}+3=0\}$ であることを示せ．

A 5.3.2　X を位相空間とする．関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ に対し，次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) f は連続である.

(2) $U = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) < y\}$ と $V = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) > y\}$ は，$X \times \mathbb{R}$ の開集合である.

A 5.3.3 $n \geq 1$ を自然数とする．連続写像 $p\colon S^{n-1} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ を，$p(x,r) = r \cdot x$ で定める.

1. p の制限 $f\colon S^{n-1} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は同相写像であることを示せ.
2. 長さが定める写像 $\| \ \|\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ は，開写像であることを示せ.

A 5.3.4 X と Y を位相空間とし，$b \in Y$ とする．連続写像 $i_b\colon X \to X \times Y$ を $i_b(x) = (x,b)$ で定め，$\mathcal{V} = \{V \in P(Y) \mid V$ は b の開近傍$\}$ とおく．部分集合 $A \subset X \times Y$ に対し，$i_b^{-1}(\overline{A}) = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} \overline{\mathrm{pr}_1((X \times V) \cap A)}$ を示せ.

A 5.3.5 X を集合とし，$(X_i)_{i \in I}$ を位相空間の族とする．$(f_i\colon X \to X_i)_{i \in I}$ を写像の族とする．X の位相 $\mathcal{O}$ について，次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ.

(1) $\mathcal{O}$ は，X の $(f_i)_{i \in I}$ による誘導位相より細かい.

(2) 任意の $i \in I$ に対し，$f_i\colon X \to X_i$ は $\mathcal{O}$ に関して連続である.

A 5.3.6 X を集合とし，$\mathcal{U} \subset P(X)$ を巾集合 $P(X)$ の部分集合とする．$\mathcal{U}$ で生成される位相は，特性関数の族 $(\chi_U : X \to \mathbb{S})_{U \in \mathcal{U}}$ による誘導位相であることを示せ.

B 5.3.7 n を自然数とする.

1. 写像 $F\colon U(n) \times (0,\infty)^n \times \mathbb{C}^{\binom{n}{2}} \to GL(n,\mathbb{C})$ を，

$$F(U, (b_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_{ij})_{1 < i < j < n}) = U \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

で定める．F は同相写像であることを示せ.

2. F の制限は，同相写像 $O(n,\mathbb{R}) \times (0,\infty)^n \times \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} \to GL(n,\mathbb{R})$ を定めることを示せ.

3. 同相写像 F による，$SL(n,\mathbb{R})$ と $SL(n,\mathbb{C})$ の逆像を求めよ.

B 5.3.8 X を位相空間とし，Y を距離空間とする．距離空間 $(\widetilde{B}(X,Y), d_{\sup})$ を，問題 5.2.6 のように定める.

1. 写像 $f : X \to Y$ に対し，f が連続であることと，問題 5.2.6 で定めた関数 $D_f : X \times Y \to \mathbb{R}$ が連続であることは同値であることを示せ.

2. $B(X,Y) = \{f \in \widetilde{B}(X,Y) \mid f$ は連続$\}$ は，$\widetilde{B}(X,Y)$ の閉集合であることも示せ.

3. $B(X,Y)$ を，距離 $d_{\sup}$ が定める一様収束位相により位相空間と考える．値写像 $B(X,Y) \times X \to Y$ は，積位相に関して連続であることを示せ.

5.4　商位相と像位相

X が位相空間であるとき，写像 $f\colon X \to Y$ に対し，像位相は $\{V \in P(Y) \mid f^{-1}(V)$ は X の開集合 $\}$ として定義された（定義 4.1.7.3.）．Y も位相空間なら，命題 4.2.2.1. より，f が連続であることは，Y の位相が像位相よりも粗いことと同値である．位相空間の同値関係による商集合の位相を，像位相として定義する．

定義 5.4.1　X を位相空間とし，R を X の同値関係とする．商集合 X/R の，商写像 $p\colon X \to X/R$ による像位相を，R による**商位相** (quotient topology) という．商集合 X/R を商位相により位相空間と考えたものを，X の R による**商空間** (quotient space) という．　□

X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．R が X の同値関係で f が写像 $g\colon X/R \to Y$ をひきおこすならば，命題 4.2.2.1. より，f が連続なことと g が連続なことは同値である．これを商空間の**普遍性**という．$f\colon X \to Y$ が連続ならば，f がひきおこす可逆写像 $\bar{f}\colon X/R_f \to f(X)$ は，X の商空間 X/R_f から Y の部分空間 $f(X)$ への連続全単射であるが，同相写像とは限らない．6.5 節で，X がコンパクトで Y がハウスドルフならば，$\bar{f}$ は同相写像であることを示す．

X を位相空間とし，A を空でない部分空間とする．X の同値関係 R_A を，$x, y \in X$ が $x \sim_A y$ であるとは，$x = y$ または $x, y \in A$ として定める．X の商空間 X/R_A を，A を **1 点につぶして得られる空間**という．

【例 5.4.2】　1. n を自然数とする．$\mathbb{R}^n$ の元 x, y に対し，$x - y \in \mathbb{Z}^n$ という関係は同値関係である．この同値関係による $\mathbb{R}^n$ の商を $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ で表わす．$n = 1$ のときは，$t \in \mathbb{R}$ を $(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1$ にうつす写像 $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ は，同相写像 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ を定める（問題 5.4.6.1.）．$f\colon \mathbb{R} \to S^1$ の積写像 $f^n\colon \mathbb{R}^n \to T^n = (S^1)^n$ は，同相写像 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to T^n$ を定める．このことは，コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続全単射は同相写像であることからも，導くことができる（問題 6.5.1）．

2. $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ とする．$S^{n-1} \subset D^n$ を 1 点につぶして得られる空間は，S^n と同相である（問題 6.6.4）．

商空間と，部分空間や積空間との関係を調べる．X を位相空間，R を X の同値関係とし，$q\colon X \to X/R$ を商写像とする．A を X の部分空間とし，$i\colon A \to X$ を包含写像とすると，合成 $q \circ i\colon A \to X/R$ は連続である．したがって，R_A を写像 $q \circ i\colon A \to X/R$ が定める同値関係とすると，商空間の間に連続単射 $A/R_A \to X/R$ が定まる．これはうめこみであるとは限らない（問題 5.4.6）．

X と Y を位相空間とし，R と R' をそれぞれ X と Y の同値関係とする．$q\colon X \to X/R$ と $q'\colon Y \to Y/R'$ を商写像とすると，その積 $q \times q'\colon X \times Y \to (X/R) \times (Y/R')$ は連続である．したがって，写像 $q \times q'$ が定める $X \times Y$ の同値関係を $R \times R'$ で表わすと，連続全単射 $(X \times Y)/(R \times R') \to (X/R) \times (Y/R')$ が定まる．これは，R' が自明な同値関係であったとしても，同相写像であるとは限らない（問題 5.4.11）．

$\mathbb{R}^n$ の部分空間として定義されるわけではない位相空間の重要な例に，射影空間がある．n を自然数とする．$\mathbb{R}^{n+1}$ の巾集合 $P(\mathbb{R}^{n+1})$ の部分集合

$$\mathbf{P}^n(\mathbb{R}) = \{L \in P(\mathbb{R}^{n+1}) \mid L \text{ は } \mathbb{R}^{n+1} \text{の 1 次元部分空間 }\}$$

を，n 次元**実射影空間** (projective space) とよぶ．写像 $p\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ を，$x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ を 1 次元部分空間 $\mathbb{R}x \subset \mathbb{R}^{n+1}$ にうつすことで定めると，$p\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ は全射である．$x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の像 $p(x) \in \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ を，$(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ で表わす．これを $p(x)$ の**同次座標** (homogeneous coordinate) という．

同様に，n 次元複素射影空間 $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ と，全射 $p\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ も定義される．$n = 1$ のときは，$\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ を**射影直線**という．

よりみち 78　射影空間を $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ や $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ で表わすのは，代数幾何で使われる記法である．トポロジーでは $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ や $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ のように書く．

射影空間の位相を，像位相として定義する．$x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ を $\mathbb{R} \cdot x \in \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ にうつす全射 $p\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ による像位相を，$\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ の位相とよぶ．

以下，$\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ を位相空間と考えるときは，この位相を考える．同様に，$\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ は，$x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ を $\mathbb{C} \cdot x \in \mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ にうつす全射 $p\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ による像位相によって，位相空間と考える．

Y の位相が，全射 f による像位相であるための十分条件を与える．

定義 5.4.3　$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．連続写像 $s\colon Y \to X$ が $f \circ s = \mathrm{id}_Y$ をみたすとき，s は f の**セクション** (section) であるという．□

命題 5.4.4　X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．f のセクション $s\colon Y \to X$ が存在すれば，Y の位相は f による像位相である．□

証明　Y を像位相に関して位相空間と考えたものを，Y' で表わす．$f\colon X \to Y$ が連続だから，命題 4.2.2.1. より，$\mathrm{id}_Y\colon Y' \to Y$ も連続である．$f\colon X \to Y'$ と s が連続だから，合成写像 $\mathrm{id}_Y = f \circ s\colon Y \to Y'$ も連続である．よって，$\mathrm{id}_Y\colon Y' \to Y$ は同相写像である．■

系 5.4.5　X と Y を位相空間とする．射影 $\mathrm{pr}_2\colon X \times Y \to Y$ による像位相は，X が空集合でなければ Y のもとの位相であり，X が空集合ならば離散位相である．□

証明　$x \in X$ ならば，連続写像 $s\colon Y \to X \times Y$ を $s(y) = (x, y)$ で定めると，$\mathrm{id}_Y = \mathrm{pr}_2 \circ s$ である．よって，命題 5.4.4 より，Y の位相は射影 $\mathrm{pr}_2\colon X \times Y \to Y$ による像位相である．

X が空集合ならば，$X \times Y = \emptyset \to Y$ は Y の離散位相に関して連続である．■

5.3 節で定義した誘導位相のように，位相空間の族からの写像に対しても，像位相を定義する．

命題 5.4.6　X を集合とし，$(X_i)_{i \in I}$ を位相空間の族とする．$(f_i)_{i \in I}$ を，写像 $f_i\colon X_i \to X$ の族とする．巾集合 $P(X)$ の部分集合

$$\mathcal{O} = \{U \in P(X) \mid \text{任意の } i \in I \text{ に対し，} f_i^{-1}(U) \text{ は } X_i \text{ の開集合である}\}$$

は，X の位相である．□

証明　開集合の公理をみたすことを確かめればよい．$(U_j)_{j\in J}$ を $\mathcal{O}$ の元の族とする．任意の $i\in I$ に対し，$f_i^{-1}(\bigcup_{j\in J}U_j)=\bigcup_{j\in J}f_i^{-1}(U_j)$ は X_i の開集合だから，$\bigcup_{j\in J}U_j\in\mathcal{O}$ である．J が有限集合ならば，任意の $i\in I$ に対し，$f_i^{-1}(\bigcap_{j\in J}U_j)=\bigcap_{j\in J}f_i^{-1}(U_j)$ は X_i の開集合だから，$\bigcap_{j\in J}U_j\in\mathcal{O}$ である．■

定義 5.4.7　X を集合とし，$(X_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とする．$(f_i)_{i\in I}$ を，写像 $f_i\colon X_i\to X$ の族とする．命題 5.4.6 で定めた X の位相 $\mathcal{O}$ を，写像の族 $(f_i)_{i\in I}$ による**像位相**という．□

添字の集合 I が 1 つの元からなる場合が，定義 4.1.7.3. で定義した像位相である．$(f_i)_{i\in I}$ による像位相 $\mathcal{O}$ は，f_i による像位相 $\mathcal{O}_i$ の共通部分 $\bigcap_{i\in I}\mathcal{O}_i$ である．よって，X の位相 $\mathcal{O}'$ について，$\mathcal{O}'$ が $(f_i)_{i\in I}$ による像位相より粗いことと，任意の $i\in I$ に対し $f_i\colon X_i\to X$ が $\mathcal{O}'$ に関して連続であることは，同値である．

誘導位相について，命題 5.3.11.2. は，ほかの位相空間の族からの連続写像に関する普遍性を表わしている．像位相については，これと双対的な普遍性がなりたつ．

命題 5.4.8　X を集合とし，$(X_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とする．$(f_i)_{i\in I}$ を，写像 $f_i\colon X_i\to X$ の族とし，X を，写像の族 $(f_i)_{i\in I}$ による像位相 $\mathcal{O}$ によって位相空間と考える．任意の位相空間 Y と任意の写像 $g\colon X\to Y$ に対し，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) $g\colon X\to Y$ は $\mathcal{O}$ に関して連続である．

(2) 任意の $i\in I$ に対し，$g\circ f_i\colon X_i\to Y$ は連続である．□

証明　(1)⇒(2): $i\in I, U\in\mathcal{O}$ とすると，$f_i^{-1}(U)$ は X_i の開集合である．よって，$f_i\colon X_i\to X$ は連続である．$g\colon X\to Y$ が連続なら，合成 $g\circ f_i\colon X_i\to Y$ も連続である．

(2)⇒(1): U を Y の開集合として，$g^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ を示せばよい．任意の $i \in I$ に対し，$g \circ f_i$ が連続ならば，$f_i^{-1}(g^{-1}(U))$ は X_i の開集合である．$\mathcal{O}$ の定義より，$g^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ である． ■

$(X_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とし，$\coprod_{i\in I} X_i$ をその直和とする．標準単射の族 $j_i\colon X_i \to \coprod_{i\in I} X_i$ による像位相を，$\coprod_{i\in I} X_i$ の**直和位相**という．任意の $i \in I$ に対し，標準単射 $j_i\colon X_i \to \coprod_{i\in I} X_i$ は，開うめこみであり，$(j_i(X_i))_{i\in I}$ は $\coprod_{i\in I} X_i$ の開被覆である．

一般に，開被覆については，次がなりたつ．

命題 5.4.9　X を位相空間とし，$(U_i)_{i\in I}$ を X の開被覆とする．

1. X の位相は，包含写像の族 $(j_i\colon U_i \to X)_{i\in I}$ による像位相である．
2. $\mathcal{U}_i$ を U_i の開集合系とすると，X の位相は，$\mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ によって生成される位相である． □

証明　1. と 2. $\mathcal{O}$ を X の位相とし，$\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ を $\mathcal{U}$ によって生成される位相，$\mathcal{O}'$ を像位相とする．$\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ だから $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{O}$ であり，包含写像は連続だから $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ である．$U \in \mathcal{O}'$ とする．任意の $i \in I$ に対し $U \cap U_i$ は U_i の開集合であり，$U = \bigcup_{i\in I}(U \cap U_i)$ だから，$U \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ である． ■

まとめ

・像位相の重要な例に，商位相や直和位相などがある．

・射影空間は，原点をとおる直線全体の集合であり，その位相は，像位相として定義される．

・像位相については，誘導位相と双対的な普遍性がなりたつ．

問題

A 5.4.1　1. 商写像 $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は開写像であることを示せ．

2. a, b を $a < b \leq a+1$ をみたす実数とする．包含写像 $i\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ がひきおこす連続単射 $\bar{i}\colon (a,b) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は，開うめこみであることを示せ．

A 5.4.2　$f\colon [0,1] \to [0,1]$ と $g\colon [0,1] \to [0,1]$ を，$f(t) = \frac{t}{2}, g(t) = \frac{t+1}{2}$ で定める．写像の対 (f, g) による $[0,1]$ の像位相は，$\mathbb{R}$ の部分空間としての位相と等しいことを示せ．

A 5.4.3　X を閉区間 $[0,1]$ とし，A を部分空間 $(0,1]$ とする．A を 1 点につぶして得られる空間 Y は，$\mathbb{S}$ と同相であることを示せ．

A 5.4.4　X を位相空間とし，$A \subset X$ を空でない部分集合とする．A を 1 点につぶして得られる空間を Y とし，$q\colon X \to Y$ を商写像とする．$q(A) = \{c\}$ とおく．

1. $q(A) = \{c\}$ が閉集合であることと，A が閉集合であることは同値であることを示せ．

2. A が閉集合であるとする．q の $X \setminus A$ への制限 $q|_{X\setminus A}\colon X \setminus A \to Y$ は，開うめこみであることを示せ．

A 5.4.5　X を位相空間とし，集合 I を離散位相空間と考える．$f\colon X \to I$ を写像とし，$i \in I$ に対し $X_i = f^{-1}(i)$ を X_i の部分空間と考える．次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) f は連続である．

(2) 包含写像 $j_i\colon X_i \to X$ の族の直和 $\coprod_{i\in I} X_i \to X$ は，位相空間の直和 $\coprod_{i\in I} X_i$ からの同相写像である．

B 5.4.6　1.　$f\colon \mathbb{R} \to S^1$ を $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ で定める．f は同相写像 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ をひきおこすことを示せ．

2. $[0,1]$ の部分集合 $\{0,1\}$ を 1 点につぶして得られる空間を $[0,1]/R$ とする．包含写像 $i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ がひきおこす写像 $\bar{i}\colon [0,1]/R \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は，同相写像であることを示せ．

3. 包含写像がひきおこす連続全単射 $[0,1) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は，同相写像でないことを示せ．

BP 5.4.7　X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．$(V_i)_{i\in I}$ を Y の開被覆とすると，次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) Y の位相は，f による像位相である．

(2) 任意の $i \in I$ に対し，V_i の位相は，f の制限 $f_i\colon f^{-1}(V_i) \to V_i$ による像位相である．

B 5.4.8　$1 \leq i \leq n+1$ に対し，$U_i = \{(x_1 : \ldots : x_{n+1}) \in \mathbf{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\}$ とおく．

1. $(U_1, \ldots, U_{n+1})$ は，$\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ の開被覆であることを示せ．

2. $j_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ を $j_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 : \ldots : x_{i-1} : 1 : x_i : \ldots : x_n)$ で定める．j_i は，同相写像 $\mathbb{R}^n \to U_i$ を定めることを示せ．

3. 単射線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ を，$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0)$ で定め，写像 $f_*\colon \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \to \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ を，$f_*(L) = f(L)$ で定める．$f_*(\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})) = \mathbf{P}^n(\mathbb{R}) \setminus U_{n+1}$ であり，$f_*\colon \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \to \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ は閉うめこみであることを示せ．

B 5.4.9　X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続全射とする．

1. f が開写像ならば，Y の位相は $\{f(U) \mid U$ は X の開集合 $\}$ であり，f による像位相であることを示せ．

2. X の部分集合 A に対し，$f_!(A) = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subset A\}$ とおく．f が閉写像ならば，Y の位相は $\{f_!(U) \mid U$ は X の開集合 $\}$ であり，f による像位相であることを示せ．

B 5.4.10　X を集合とし，$(X_i)_{i\in I}$ を X の被覆とする．$i \in I$ に対し，$\mathcal{O}_i$ を X_i の位相とし，X_i を位相空間と考える．次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) 包含写像の族 $(j_i\colon X_i \to X)_{i\in I}$ による像位相によって，X を位相空間と考えると，$(X_i)_{i\in I}$ は X の開被覆であり，任意の $i \in I$ に対し，$j_i\colon X_i \to X$ は開うめこみである．

(2) 任意の $i, j \in I$ に対し，$X_i \cap X_j$ は，X_i と X_j の開部分空間であり，X_i からの相対位相と X_j からの相対位相は等しい．

よりみち 79　問題 5.4.10 の条件 (2) がなりたつとき，位相の族 $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ は，**はりあわせの条件**をみたすといい，X を，$(X_i)_{i\in I}$ をはりあわせて得られる位相空間という．

C 5.4.11　A を閉区間 $[0,1]$ の空でない部分集合とし，$Z = [0,1] \setminus A$ を補集合とする．$[0,1] \times [0,1]$ の部分空間 X を $X = ([0,1] \times [0,1]) \setminus (Z \times \{0\})$ で定める．$A \times \{0\} \subset X$ を 1 点につぶして得られる空間を Y とし，$q\colon X \to Y$ を商写像とする．$\{y_0\} = q(A \times \{0\})$ とおく．積空間 $X \times Z \subset [0,1]^3$ の閉集合 B を $B = \{(x,y,z) \in X \times Z \mid |x - z| \leq y\}$ で定める．

1. 積写像 $q \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ による像位相に関して，像 $C = (q \times \mathrm{id}_Z)(B)$ は，閉集合であることを示せ．

2. $Y \times Z$ の積位相に関する C の閉包を $\overline{C}$ とすると，$\overline{C} \setminus C = \{y_0\} \times (\overline{(A \cap \overline{Z})} \cap Z)$ であることを示せ．

3. A も Z も $[0,1]$ で稠密ならば，$Y \times Z$ の積位相は，積写像 $q \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ による像位相より，真に粗いことを示せ．

第6章 位相空間の性質

この章では，コンパクト性などの，位相空間の基本的な性質を解説する．まず 6.1 節で，距離空間をはじめとするふつうの位相空間についてなりたつ，ハウスドルフ性を定義する．実数値連続関数の閉区間 $[a,b]$ での値については，中間値の定理がなりたつ．6.2 節では，位相空間の部分集合の連結性を定義し，中間値の定理を一般化する．

実数値連続関数の閉区間 $[a,b]$ での値について，最大値の定理もなりたつ．6.3 節では，位相空間の重要な性質であるコンパクト性を定義し，最大値の定理を一般化する．6.4 節では，コンパクト集合の定義を積位相を使っていいかえて，コンパクト集合の基本的な性質を導く．6.5 節では，ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合である，という重要な性質を示す．$\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とは，有界閉集合のことであることも示す．6.6 節では，局所コンパクト空間を定義し，それを開部分空間として含むコンパクト空間を構成する．複素射影直線のコンパクト性の応用として，代数学の基本定理も証明する．

6.1 ハウスドルフ空間

定義 6.1.1 X を位相空間とする．X が次の条件 (H) をみたすとき，X は**ハウスドルフ空間** (Hausdorff space) であるという．

(H) : 任意の $x, y \in X$ に対し，$x \neq y$ ならば，x の開近傍 U と y の開近傍 V で，$U \cap V = \emptyset$ をみたすものが存在する． □

ハウスドルフ空間の重要な性質として，極限の一意性がある．これは，8.1 節で扱う．

よりみち 80　ハウスドルフは，20 世紀はじめに，公理的位相空間論を確立した数学者である．ハウスドルフ空間の名前は，彼の公理系が条件 (H) を含むものだったことにちなむ．ハウスドルフということばは，「X はハウスドルフである」のように，形容詞的に使うことが多い．

フランス系の文献では，ハウスドルフ空間を**分離空間**（仏 espace séparé）とよぶ．

位相が細かければ細かいほど，ハウスドルフになりやすい．離散空間はハウスドルフ空間である．密着空間 X がハウスドルフであるための条件は，X の元の個数が 1 以下であることである．$0 \in \mathbb{S}$ を元として含む開集合は $\mathbb{S}$ しかないから，$\mathbb{S}$ はハウスドルフでない．

命題 6.1.2　X が距離空間ならば，X はハウスドルフである．□

証明　X を距離空間とし，d を距離とする．$x, y \in X, x \neq y$ とすると，$d(x,y) > 0$ である．$r = \dfrac{d(x,y)}{2} > 0$ とおく．$z \in U_r(x) \cap U_r(y)$ とすると，$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2r$ となり矛盾だから，$U_r(x) \cap U_r(y) = \emptyset$ である．■

命題 6.1.3　X を位相空間とする．

1. 次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) X はハウスドルフである．

(2) 対角集合 $\Delta_X = \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}$ は，積空間 $X \times X$ の閉集合である．

2. X がハウスドルフなら，任意の点 $x \in X$ に対し，$\{x\}$ は X の閉集合である．□

証明　1. $\Delta_X \subset X \times X$ が閉集合であることは，補集合 $(X \times X) \setminus \Delta_X$ が開集合であることと同値である．積位相の特徴づけ（命題 5.3.2.1.）より，これは，任意の $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$ に対し，x の開近傍 U と y の開近傍 V で，$U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta_X$ をみたすものが存在することと同値である．$(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$ とは，$x \neq y$ ということである．$U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta_X$

とは，$\Delta_X \cap (U \times V) = \emptyset$ ということであり，$U \cap V = \emptyset$ と同値である．したがって，定義 6.1.1 の条件 (H) は，$\Delta_X \subset X \times X$ が閉集合であることと同値である．

2. $x \in X$ とする．連続写像 $i_x\colon X \to X \times X$ を $i_x(y) = (x, y)$ で定める．$\{x\} = i_x^{-1}(\Delta_X)$ は閉集合である． ■

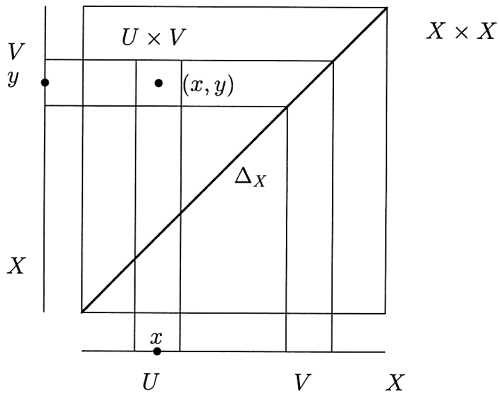


図 6.1　$(U \times V) \cap \Delta_X = \emptyset$ と $U \cap V = \emptyset$

命題 6.1.4　$f\colon X \to Y$ を連続単射とする．Y がハウスドルフなら，X もハウスドルフである． □

証明　f が単射なら，対角集合 Δ_X は，$f \times f\colon X \times X \to Y \times Y$ による Δ_Y の逆像である．$f \times f$ は連続だから，Δ_Y が閉集合なら，Δ_X も閉集合である． ■

系 6.1.5　X をハウスドルフ空間とする．X の部分空間 A はハウスドルフである． □

証明　命題 6.1.4 を，包含写像 $A \to X$ に適用すればよい． ■

命題 6.1.6　位相空間 X に対し，次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) X はハウスドルフである．

(2) 任意の位相空間 T と任意の連続写像 $f, g\colon T \to X$ に対し，$\mathrm{Ker}(f,g) = \{t \in T \mid f(t) = g(t)\}$ は T の閉集合である．

(3) 任意の位相空間 T と任意の連続写像 $f\colon T \to X$ に対し，f のグラフ $\Gamma = \{(t,x) \in T \times X \mid f(t) = x\}$ は $T \times X$ の閉集合である． □

証明　(1)⇒(2): $\mathrm{Ker}(f,g) \subset T$ は，連続写像 $(f,g)\colon T \to X \times X$ による，対角集合 $\Delta_X \subset X \times X$ の逆像である．よって，$\Delta_X \subset X \times X$ が閉集合なら，$\mathrm{Ker}(f,g) = (f \times g)^{-1}(\Delta_X)$ も閉集合である．

(2)⇒(3): 連続写像 $f\colon T \to X$ のグラフ $\Gamma \subset T \times X$ は，積空間からの連続写像 $f \circ \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2\colon T \times X \to X$ についての $\mathrm{Ker}(f \circ \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$ である．

(3)⇒(1): 対角集合 $\Delta_X \subset X \times X$ は，恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ のグラフである． ■

系 6.1.7　X を位相空間とし，Y をハウスドルフ空間とする．A が X の稠密な部分集合ならば，制限写像 $C(X,Y) \to C(A,Y)$ は単射である． □

証明　$f, g \in C(X,Y)$ とし，$f|_A = g|_A$ とする．$\mathrm{Ker}(f,g)$ は X の閉集合であり，$A \subset \mathrm{Ker}(f,g)$ である．$A \subset X$ が稠密なら，$X = \mathrm{Ker}(f,g)$ であり，$f = g$ である． ■

命題 6.1.8　1. $(X_i)_{i \in I}$ をハウスドルフ空間の族とすると，積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ はハウスドルフである．

2. X と Y を位相空間とし，$X \times Y$ がハウスドルフであるとする．Y が空でなければ，X はハウスドルフである． □

証明　1. $X = \prod_{i \in I} X_i$ とおく．対角集合 $\Delta_X \subset X \times X$ は，射影の積 $\mathrm{pr}_i \times \mathrm{pr}_i\colon X \times X \to X_i \times X_i$ による，対角集合 Δ_{X_i} の逆像の共通部分 $\bigcap_{i \in I} (\mathrm{pr}_i \times \mathrm{pr}_i)^{-1}(\Delta_{X_i})$ である．Δ_{X_i} は $X_i \times X_i$ の閉集合であり，$\mathrm{pr}_i \times \mathrm{pr}_i$ は連続だから，Δ_X は閉集合である．

2. $b \in Y$ とする．写像 $f\colon X \to X \times Y$ を $f(x) = (x, b)$ で定めると，f は連続単射である．したがって，$X \times Y$ がハウスドルフなら X もハウスドルフ

フである. ■

定義 6.1.9 X をハウスドルフ空間とする. X の任意の空でない閉集合 A, B について次の条件 (N) がなりたつとき, X は**正規** (normal) であるという.

(N): $A \cap B = \emptyset$ ならば, A の開近傍 $U \subset X$ と B の開近傍 $V \subset X$ で, $U \cap V = \emptyset$ をみたすものが存在する. □

$A = \emptyset$ ならば, $U = \emptyset$ とすれば条件 (N) はみたされるから, 定義 6.1.9 で, A, B が空でないという条件はのぞいてもよい.

命題 6.1.10 X が距離空間ならば, X は正規である. □

証明 A と B を X の空でない閉集合とし, $A \cap B = \emptyset$ とする. 命題 5.2.6.1. より, $U = \{x \in X \mid d(x, A) < d(x, B)\}$ と $V = \{x \in X \mid d(x, A) > d(x, B)\}$ は X の開集合であり, $U \cap V = \emptyset$ である. 命題 5.2.6.2. より, $x \in A \subset X \setminus \overline{B}$ なら $d(x, A) = 0 < d(x, B)$ だから, $A \subset U$ である. 同様に, $B \subset V$ である. ■

まとめ
・対角集合が閉集合であるような位相空間を, ハウスドルフ空間とよぶ.
・距離空間はハウスドルフである. したがって, $\mathbb{R}^n$ や, その部分空間などの, よくでてくる位相空間はたいていハウスドルフである.
・ハウスドルフ空間への連続写像は, 稠密な部分集合への制限で一意的に定まる.

問題

A 6.1.1 1. X がハウスドルフ空間ならば, X の有限部分集合はすべて離散閉集合であることを示せ.

2. X を有限な位相空間とする. 次の条件 (1)–(3) は同値であることを示せ.

(1) X はハウスドルフである.

(2) X は離散である.

(3) X の任意の点 x に対し，$\{x\}$ は閉集合である．

A 6.1.2　X を位相空間とし，R を X の同値関係とする．商空間 X/R がハウスドルフならば，R のグラフ C は $X \times X$ の閉集合であることを示せ．（このことの逆はなりたたない．反例は問題 6.1.5 にある．）

A 6.1.3　X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．$A \subset X$ を稠密な部分集合とし，Y はハウスドルフであるとする．$\Gamma_A \subset A \times Y$ を f の A への制限のグラフとすると，f のグラフは，Γ_A の $X \times Y$ での閉包と等しいことを示せ．

B 6.1.4　$n \geq 1$ を自然数とする．

1. たてベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ に対し ${}^t x \in M(1,n;\mathbb{R})$ でその転置を表わし，連続写像 $V\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to M(n,\mathbb{R})$ を，$V(x) = \dfrac{x\,{}^t x}{{}^t x x}$ で定める．$V\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to M(n,\mathbb{R})$ は，連続単射 $\bar{V}\colon \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \to S^{n^2-1}$ をひきおこすことを示せ．
2. 射影空間 $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ は，ハウスドルフであることを示せ．

B 6.1.5　$X = [0,1] \times [0,1]$ の部分集合 A と U と T を，

$$A = \{0\} \times (0,1], \quad U = X \setminus \{(0,0)\}, \quad T = X \setminus A$$

で定める．U, T を $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間と考える．包含写像 $U \to X, T \to X$ による像位相により，X を位相空間と考える．Y を，$A \subset X$ を 1 点につぶして得られる空間とし，$q\colon X \to Y$ を商写像とする．

1. A は X の閉集合であることを示せ．
2. X の位相は，$\mathbb{R}^2$ の部分空間としての位相より真に細かいことを示せ．
3. X はハウスドルフであることを示せ．
4. Y はハウスドルフでないことを示せ．
5. $q \times q$ による Δ_Y の逆像は，$X \times X$ の閉集合であることを示せ．

よりみち 81　ハウスドルフ空間 X が，空でない任意の閉部分集合 A に対し A を 1 点につぶして得られる空間もハウスドルフであるとき，X は**正則** (regular) であるという．問題 6.1.5 の空間 X はハウスドルフだが正則でない．そのことを使って，問題 6.1.2 の逆の反例を構成している．

6.2　連結性

閉区間 $[a,b]$ で定義された実数値連続関数については，中間値の定理がなりたつ．これを抽象化することで，位相空間の部分集合の連結性を定義する．

定義 6.2.1 X を位相空間とし，A を X の空でない部分集合とする．

1. A が**連結** (connected) であるとは，X の開集合 U と V で条件

$$A \subset U \cup V, \quad A \cap U \cap V = \emptyset, \quad A \cap U \neq \emptyset, \quad A \cap V \neq \emptyset$$

をすべてみたすものは存在しないことをいう．

2. A が**弧状連結** (path connected) であるとは，A の任意の点 $x, y \in A$ に対し，閉区間 $[0,1]$ からの連続写像 $f\colon [0,1] \to X$ で，$f(0) = x, f(1) = y$, $f([0,1]) \subset A$ をみたすものが存在することをいう． □

空でない位相空間 X が連結であるとは，X の開集合 U, V が，$X = U \amalg V$ をみたすならば，$U = \emptyset$ か $V = \emptyset$ のどちらかがなりたつことである．$A \subset U \cup V$ は $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ と同値であり，$A \cap U \cap V = \emptyset$ は $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$ と同値だから，X の部分集合 A が連結集合であることは X の部分空間 A が連結であることと同値である．空集合は連結であるとしている本が多いが，この本では，空集合は連結でないことにする．

【**例 6.2.2**】 1. 離散空間 X が連結であるための条件は，X の元がちょうど 1 個だけであることである．

2. $\mathbb{S}$ は連結である．$[0,1]$ の開集合 $U = (0,1]$ の特性関数 $\chi_U\colon [0,1] \to \mathbb{S}$ は連続だから，$\mathbb{S}$ は弧状連結である．

3. $\mathbb{R}^n$ の任意の 2 点は線分で結べるから，$\mathbb{R}^n$ は弧状連結である．同様に，単位円板 D^n や，開球 $U_r(a)$ も弧状連結である．

弧状連結なら連結であることを，系 6.2.11 で示す．$\mathbb{R}$ の部分集合に対しては，連結であることと弧状連結であることは同値であり，これはさらに区間であることとも同値であることを，命題 6.2.12 で示す．$\mathbb{R}^2$ の部分集合で，連結だが弧状連結でないものの例がある（問題 6.5.3）．

連結空間については，中間値の定理がなりたつ．逆に，中間値の定理がなりたつような位相空間は，連結である．

命題 6.2.3 空でない位相空間 X に対し，次の条件 (1)–(4) は同値である．

(1) X は連結である．

(2) 任意の連続関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ と任意の $u, v \in X$，任意の実数 c に対し，

$f(u) \leq c \leq f(v)$ ならば $c = f(t)$ をみたす $t \in X$ が存在する．

(3) $f\colon X \to 2$ が，離散位相空間 $2 = \{0, 1\}$ への連続写像ならば，f は定数関数である．

(4) U が X の開集合であり閉集合でもあるならば，$U = X$ または $U = \emptyset$ である． □

命題 6.2.3 の (1)⇒(2) を**中間値の定理** (intermediate value theorem) という．

証明　(1)⇒(2): $f\colon X \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$f(u) = c$ なら $t = u$ とすればよく，$f(v) = c$ なら $t = v$ とすればよいから，$f(u) < c < f(v)$ の場合に示せばよい．X の開集合 U, V を，$U = \{x \in X \mid f(x) < c\}, V = \{x \in X \mid f(x) > c\}$ で定める．$U \cap V = \emptyset$ であり，$u \in U \neq \emptyset$ かつ $v \in V \neq \emptyset$ である．よって，X が連結なら，$X \not\subset U \cup V = \{x \in X \mid f(x) \neq c\}$ である．$t \in X, t \notin U \cup V$ とすると，$c = f(t)$ である．

(2)⇒(3): $f\colon X \to 2 = \{0, 1\}$ を連続関数とする．f を関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ と考えたものも連続である．$f(X) = 2$ なら $f(t) = \frac{1}{2}$ をみたす $t \in X$ が存在することになり矛盾である．よって，f は定数関数である．

(3)⇒(4): U が X の開集合であり閉集合でもあるならば，特性関数 $\chi_U\colon X \to 2$ は連続である．χ_U が定数関数 1 なら $U = X$ であり，χ_U が定数関数 0 なら $U = \emptyset$ である．

(4)⇒(1): X の開集合 U, V が $X \subset U \cup V$ と $X \cap U \cap V = \emptyset$ をみたすならば，$V = X \setminus U$ である．よって，(4) ならば $U = \emptyset$ または $V = \emptyset$ だから，X は連結である． ■

よりみち 82　命題 6.2.3 の条件 (2), (3), (4) は，どれも，空でない位相空間についての連結性の特徴づけである．この節では，このいいかえを使って，連結性に関する各命題を証明する．このように，もとの定義のかわりに，扱いやすい同値な条件を状況に応じ使いわけることは，常套手段である．1 つのものをいろいろな方向からみることで，理解が深まるということである．

コンパクト性についても同じように，命題 6.4.1 や命題 6.4.4 で示す特徴づけも使って，各命題を証明する．

系 6.2.4 X を位相空間とする．

1. A を X の連結部分集合とする．B が $A \subset B \subset \overline{A}$ をみたす X の部分集合ならば，B も連結である．

2. A と B を X の連結部分集合とする．$A \cap B \neq \emptyset$ ならば，$A \cup B$ も連結である． □

証明 1. $a \in A \subset B$ とする．$f\colon B \to 2$ を連続写像とする．A が連結なら，$c = f(a) = 0, 1$ とおくと，制限 $f|_A\colon A \to 2$ は，定数関数 $c\colon B \to 2$ の A への制限 $c|_A$ と等しい．2 はハウスドルフだから，系 6.1.7 より，f は定数関数 c である．よって，命題 6.2.3(3)⇒(1) より，B も連結である．

2. $a \in A \cap B$ とする．$f\colon A \cup B \to 2$ を連続写像とする．A, B が連結なら，$c = f(a) = 0, 1$ とおくと，制限 $f|_A\colon A \to 2$ と $f|_B\colon B \to 2$ はどちらも定数関数 c である．よって，f は定数関数 c である．よって，命題 6.2.3(3)⇒(1) より，$A \cup B$ も連結である． ■

$\mathbb{R}$ の閉区間は連結であることを示す．このことを使って，命題 6.2.12 で，$\mathbb{R}$ の連結部分集合とは，区間のことであることを示す．

命題 6.2.5 $a < b$ を実数とする．閉区間 $[a, b]$ は連結である． □

証明 $X = [a, b]$ の空でない開集合 U, V が $X = U \amalg V$ をみたすと仮定して，矛盾を導けばよい．$b \in U$ または $b \in V$ だから，b を含むほうを V とよぶことにして，$b \in V$ の場合を示せばよい．b は $U \subset [a, b]$ の上界で $U \neq \emptyset$ だから，実数の連続性より，上限 $s = \sup U \in [a, b]$ が存在する．命題 4.3.3 より，$s \in \overline{U}$ である．

$s \in \overline{V}$ を示す．s は U の上界だから，$U \cap (s, b] = \emptyset$ である．$U \cup V = X$ だから，$(s, b] \subset V$ である．$s < b$ なら，$s \in [s, b] = \overline{(s, b]} \subset \overline{V}$ である．$s = b$ なら，$s = b \in V \subset \overline{V}$ である．

$X = U \amalg V$ より，$U = X \setminus V, V = X \setminus U$ は X の閉集合である．よって，$s \in \overline{U} \cap \overline{V} = U \cap V = \emptyset$ となり，矛盾である． ■

系 6.2.6 $a < b$ を実数とする．

1. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$f(a) \leq f(b)$ ならば，$[f(a), f(b)] \subset f([a,b])$ である．

2. $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．任意の $a < s < t < b$ に対し $f(s) < f(t)$ であるならば，$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ は開うめこみである． □

証明 1. 命題 6.2.5 より閉区間 $[a,b]$ は連結だから，命題 6.2.3(1)⇒(2) よりしたがう．

2. f は連続単射だから，開写像であることを示せばよい．U を (a,b) の開集合とし，$f(U)$ が $\mathbb{R}$ の開集合であることを示す．$y \in f(U)$ とすると，$y = f(x)$ をみたす $x \in U$ があり，$x \in (s,t) \subset U$ をみたす実数 $a < s < x < t < b$ がある．f は単射だから $f((s,t)) = f([s,t]) \setminus \{f(s), f(t)\}$ であり，さらに 1. より右辺は $[f(s), f(t)] \setminus \{f(s), f(t)\} = (f(s), f(t))$ である．よって，$y = f(x) \in (f(s), f(t)) \subset f(U)$ だから，$f(U)$ は開集合である． ■

位相空間を，連結な部分集合の合併に分割する．

命題 6.2.7 X を位相空間とする．

1. $x, y \in X$ に対し，x と y を元として含む連結な部分集合 $A \subset X$ が存在するという条件は，X の同値関係 R を定める．

2. A を 1. で定めた同値関係 R に関する同値類とすると，A は連結な閉集合である． □

証明 1. $x \in X$ なら，$\{x\}$ は連結だから，反射律がなりたつ．対称律は明らかである．A, B を連結部分集合とし，$x, y \in A, y, z \in B$ とする．$y \in A \cap B \neq \emptyset$ だから，系 6.2.4.2. より，$A \cup B$ は連結である．$x, z \in A \cup B$ だから，推移律もなりたつ．

2. $a \in A$ とする．$f\colon A \to 2$ を連続写像とする．$c = f(a) = 0, 1$ とおく．任意の $x \in A$ に対し，$a, x \in B$ をみたす連結部分集合 $B \subset X$ が存在する．任意の $y \in B$ に対し，$y \in A$ となるから，$B \subset A$ である．$f|_B$ は定数関数 c だから，$f(x) = c$ である．$x \in A$ は任意だから，f は定数関数 c である．よって，命題 6.2.3(3)⇒(1) より，A は連結である．

系 6.2.4.1. より，$\overline{A}$ も連結だから，$\overline{A} \subset A$ である．よって，A は閉集合である． ■

定義 6.2.8 X を位相空間とし，R を命題 6.2.7.1. で定義した同値関係とする．X の R による同値類を，X の**連結成分** (connected component) という．商集合 X/R を $\pi_0(X)$ で表わす．$x \in X$ に対し，x の同値類を，x を含む連結成分という．

R が自明な同値関係であるとき，X は**全不連結** (totally disconnected) であるという． □

命題 6.2.7.2. より，位相空間 X が連結であるとは，X の連結成分がただ 1 つであることである．$x \in X$ を含む連結成分は，x を含む最大連結部分集合である．X の連結成分は X の閉集合であるが，開集合であるとは限らない (問題 6.2.4)．X が $\mathbb{R}^n$ の開集合ならば，X の連結成分は X の開集合である (問題 6.2.7.2.)．

命題 6.2.9 $f\colon X \to Y$ を連続写像とする．A が X の連結部分集合ならば，$f(A)$ は Y の連結部分集合である． □

証明 $A \neq \emptyset$ だから $f(A) \neq \emptyset$ である．$g\colon f(A) \to 2$ を連続関数とする．A が連結なら，命題 6.2.3(1)⇒(3) より，合成写像 $g \circ f|_A$ は定数関数である．$f|_A\colon A \to f(A)$ は全射だから，g も定数関数である．よって，命題 6.2.3(3)⇒(1) より，$f(A)$ も連結である． ■

系 6.2.10 X と Y を位相空間とする．次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) X と Y は連結である．

(2) $X \times Y$ は連結である． □

証明 (1)⇒(2): $a \in X, b \in Y$ とし，$C \subset X \times Y$ を (a, b) を含む連結成分とする．$X \times Y = C$ を示す．$(x, y) \in X \times Y$ とする．$X \times \{b\}$ と $\{x\} \times Y$ は，それぞれ X, Y と同相だから連結である．$(a, b), (x, b) \in X \times \{b\}$ だから $(x, b) \in C$ であり，$(x, b), (x, y) \in \{x\} \times Y$ だから $(x, y) \in C$ である．$(x, y) \in X \times Y$ は

任意だから，$X \times Y = C$ は連結である．

(2)⇒(1): $X \times Y$ は空でないから，X も Y も空でない．したがって，射影 $\mathrm{pr}_1 \colon X \times Y \to X$ と $\mathrm{pr}_2 \colon X \times Y \to Y$ は，どちらも連続全射である．$X \times Y$ が連結なら，命題 6.2.9 より，X も Y も連結である．■

系 6.2.11　位相空間 X が弧状連結ならば，X は連結である．□

証明　X が弧状連結であるとする．$x, y \in X$ とすると，連続関数 $f \colon [0,1] \to X$ で，$f(0) = x, f(1) = y$ をみたすものが存在する．命題 6.2.5 と命題 6.2.9 より，$f([0,1])$ は連結である．よって，X の連結成分はただ 1 つである．■

系 6.2.11 と例 6.2.2.3. より，$\mathbb{R}^n$ とその部分空間 $U_r(a)$ や D^n は連結である．$\mathbb{R}$ の部分集合の連結性については，次がなりたつ．

命題 6.2.12　$\mathbb{R}$ の部分集合 A に対し，次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) A は連結である．

(2) A は弧状連結である．

(3) 次の条件 (i)–(iv) のどれか 1 つがなりたつ．

　(i) $A = \mathbb{R}$ である．

　(ii) 実数 $a \in \mathbb{R}$ で，A が $[a, \infty), (a, \infty), (-\infty, a), (-\infty, a]$ のどれかと等しいものが存在する．

　(iii) 実数 $a < b \in \mathbb{R}$ で，A が $(a,b), (a,b], [a,b), [a,b]$ のどれかと等しいものが存在する．

　(iv) 実数 $a \in \mathbb{R}$ で，$A = \{a\}$ となるものが存在する．□

証明　(1)⇒(3): A が連結なら，$A \neq \emptyset$ である．$-\infty \leq p = \inf A \leq q = \sup A \leq \infty$ とおく．任意の $t \in (p, q)$ に対し，t は A の下界でも上界でもないから，$p < u < t < v < q$ をみたす $u, v \in A$ が存在する．命題 6.2.3 を包含写像 $A \to \mathbb{R}$ に適用すれば，$t \in A$ である．よって，$(p, q) \subset A \subset [p, q]$ が示された．

$p = -\infty$, $q = \infty$ ならば，(i) がなりたち，$p = a \in \mathbb{R}$, $q = \infty$ か $p = -\infty, q = a \in \mathbb{R}$ ならば，(ii) がなりたつ．$p, q \in \mathbb{R}$ のときは，$p = a < q = b$

ならば，(iii) がなりたち，$p=q=a$ ならば，(iv) がなりたつ．

(3)⇒(2): A を (3) の条件をみたす $\mathbb{R}$ の部分集合とする．$x,y\in A$ とすると，写像 $f\colon[0,1]\to A$ を $f(t)=(1-t)x+ty$ で定めれば，f は連続であり，$f(0)=x, f(1)=y$ である．

(2)⇒(1): 系 6.2.11 で示されている．■

まとめ

・空でない開集合 2 つに分割できない，空でない位相空間を連結空間とよぶ．

・連結空間で定義された実数値連続関数について，中間値の定理がなりたつ．

・数直線の連結な部分集合は，区間である．

問題

A 6.2.1　1. $a<b$ を実数とする．開区間からの連続関数 $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ で，同相写像であるものを 1 つ与えよ．

2. 連続関数 $g\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ で，同相写像であるものを 1 つ与えよ．

A 6.2.2　1. $n\geq 1$ なら S^n は連結であることを示せ．

2. T^n も連結であることを示せ．

A 6.2.3　X を位相空間とし，A と B を X の連結部分集合とする．次の条件 (1)–(3) を考える．

(1) $A\cap B\neq\emptyset$ である．

(2) $A\cup B$ は連結である．

(3) $\overline{A}\cap\overline{B}\neq\emptyset$ である．

1. (2)⇒(3) を示せ．

2. $X=\mathbb{R}$ とする．(2)⇒(1) の反例を与えよ．(3)⇒(2) の反例も与えよ．

A 6.2.4　$\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間とする．0 を含む $\mathbb{Q}$ の連結成分は，$\{0\}$ であり，$\mathbb{Q}$ の開集合でないことを示せ．

B 6.2.5　1. U を $\mathbb{R}^n$ の連結開集合とし，$a\in U$ とする．$U\setminus\{a\}$ は，$n\geq 2$ なら連結であり，$n=1$ なら連結でないことを示せ．

2. $\mathbb{R}$ と半開区間 $[0,1)$ は同相でないことを示せ．

3. $n \geq 2$ なら，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^n$ は同相でないことを示せ．

B 6.2.6　X を位相空間とし，$F\colon X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．任意の $x \in X$ と $y, z \in \mathbb{R}$ に対し，$y < z$ なら $F(x,y) < F(x,z)$ であると仮定する．a を実数とし，$\Gamma_a = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid F(x,y) = a\}$ は関数 $f_a\colon X \to \mathbb{R}$ のグラフであるとする．

1. 関数 f_a は連続であることを示せ．

2. $b > a$ を実数とし，$\Gamma_b = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid F(x,y) = b\}$ も関数 $f_b\colon X \to \mathbb{R}$ のグラフであるとする．$\Gamma = \{(x,z,y) \in X \times [a,b] \times \mathbb{R} \mid F(x,y) = z\}$ は，連続関数 $G\colon X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ のグラフであることを示せ．

B 6.2.7　X を位相空間とし，命題 6.2.7.1. で定めた X の同値関係を R とする．

1. $x, y \in X$ に対し，$x = f(0), y = f(1)$ をみたす連続写像 $f\colon [0,1] \to X$ が存在するという条件は，X の同値関係 R' を定めることを示せ．R' は，R より細かいことも示せ．

2. X を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．同値関係 R と R' は同値であり，X の連結成分は X の開集合であることを示せ．

B 6.2.8　$f\colon X \to Y$ を連続写像とし，A を X の部分集合とする．任意の $y \in f(A)$ に対し $A \cap f^{-1}(y)$ が連結であり，$f(A)$ の位相が $f|_A\colon A \to f(A)$ による像位相であるとする．$f(A)$ が連結ならば，A も連結であることを示せ．

B 6.2.9　問題 6.1.5 と同様に，$X = [0,1] \times [0,1]$ の部分集合 U と T を，$U = X \setminus \{(0,0)\}, T = X \setminus (\{0\} \times (0,1])$ で定める．U, T を $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間と考える．包含写像 $U \to X, T \to X$ による像位相により，X を位相空間と考える．$f\colon X \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．

1. X の部分空間 $A = \{0\} \times [0,1]$ は連結でないことを示せ．

2. $f\colon X \to \mathbb{R}$ は，X の $\mathbb{R}^2$ の部分空間としての位相に関して連続であることを示せ．

3. $f(A)$ は閉区間であることを示せ．

BP 6.2.10 AC　$(X_i)_{i \in I}$ を位相空間の族とする．次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) 任意の $i \in I$ に対し，X_i は連結である．

(2) 積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は連結である．

C 6.2.11　$n \geq 1$ を自然数とする．

1. $SO(n, \mathbb{R})$ は連結であることを示せ．

2. 関数 $\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R}^\times \to \{\pm 1\}$ を，$x = \mathrm{sgn}(x)|x|$ で定める．$\mathrm{sgn} \circ \det\colon GL(n, \mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$ は，可逆写像 $\pi_0(GL(n, \mathbb{R})) \to \{\pm 1\}$ をひきおこすことを示せ．

6.3 コンパクト性と実数

定義 6.3.1 X を位相空間とし，A を部分集合とする．A がコンパクト (compact) であるとは，X の開集合の任意の族 $(U_i)_{i\in I}$ について，次の条件 (C) がなりたつことをいう．

(C) : $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ ならば，I の有限部分集合 $\{i_1,\ldots,i_n\}$ で，$A \subset U_{i_1}\cup\cdots\cup U_{i_n}$ をみたすものが存在する． □

よりみち 83 コンパクトとは，ぎっしりつまったという意味である．開区間 (a,b) と閉区間 $[a,b]$ を比べてみると，開区間には両端の 2 点 a,b が欠けている．たった 2 点だが，そのために，閉区間で定義された連続関数 f の積分 $\int_a^b f(x)dx$ は必ず収束するのに対し，開区間の場合は発散することもあるという大きな差が生じている．コンパクト性は，この差の元となる閉区間と開区間の性質の違いを，位相的にとらえるものである．

コンパクト集合の定義も，ε-δ 論法とならんで，初心者にはわかりにくいという定評がある．ε-δ 論法の場合と同じく，ここでも，構文的な側面と数学的な内容の両方の難しさがある．この節では，コンパクト集合の定義は，閉区間の性質のうち，最大値の定理の証明の中で使われる部分を，一般の位相空間へ抽象化したものと解釈する．次節では，これを積位相を使っていいかえる．さらに 6.5 節では，ハウスドルフ空間への連続写像を考えると，コンパクト空間とは欠落のない空間であると考えられることを解説する．

X の部分集合 A がコンパクトであるとき，A は X のコンパクト集合であるともいう．X がコンパクトであるとき，X はコンパクト空間であるという．X がコンパクト空間であるとは，$(U_i)_{i\in I}$ が X の開被覆ならば，$(U_i)_{i\in I}$ の有限部分被覆が存在するということである．

離散空間がコンパクトであるための条件は，有限であることである．位相が粗ければ粗いほど，コンパクトになりやすい．密着空間はコンパクトである．この性質は，ハウスドルフ性と対照的である．6.5 節で，この 2 つの性質の関係を調べる．

よりみち 84　フランス系の文献では，コンパクト空間を**準コンパクト** (quasi-compact) 空間とよび，それが分離であるときに限ってコンパクト空間とよぶ．

あとでてくるハイネ・ボレルの定理（定理 6.3.6）を，フランスではボレル・ルベーグの定理とよぶ．

コンパクト集合の定義を，閉集合を使っていいかえることができる．

命題 6.3.2　X を位相空間とする．X の部分集合 A に対し，次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) A はコンパクト集合である．

(2) X の閉集合の任意の族 $(F_i)_{i\in I}$ について，次の条件 (C') がなりたつ．

(C') : I の任意の有限部分集合 $\{i_1,\dots,i_n\}$ に対し $A\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_n}\neq\emptyset$ ならば，$A\cap\bigcap_{i\in I}F_i\neq\emptyset$ である．

(3) X の部分位相空間 A は，コンパクト空間である．□

証明　(1)⇔(2): $F_i=X\setminus U_i$ とおけば，X の開集合の族 $(U_i)_{i\in I}$ を考えることと，X の閉集合の族 $(F_i)_{i\in I}$ を考えることは同じことである．コンパクト性の定義の条件 (C) の対偶は，

(C'') : I の任意の有限部分集合 $\{i_1,\dots,i_n\}$ に対し $A\not\subset U_{i_1}\cup\cdots\cup U_{i_n}$ ならば，$A\not\subset\bigcup_{i\in I}U_i$ である．

となる．$A\not\subset\bigcup_{i\in I}U_i$ は，$A\cap(X\setminus\bigcup_{i\in I}U_i)=A\cap\bigcap_{i\in I}(X\setminus U_i)$ が空集合でないことと同値である．同様に，$A\not\subset U_{i_1}\cup\cdots\cup U_{i_n}$ は，$A\cap(X\setminus(U_{i_1}\cup\cdots\cup U_{i_n}))=A\cap(X\setminus U_{i_1})\cap\cdots\cap(X\setminus U_{i_n})$ が空集合でないことと同値である．

(1)⇔(3): $A\subset\bigcup_{i\in I}U_i$ は，$A=\bigcup_{i\in I}(A\cap U_i)$ と同値であり，$A\subset U_{i_1}\cup\cdots\cup U_{i_n}$ は，$A=(A\cap U_{i_1})\cup\cdots\cup(A\cap U_{i_n})$ と同値である．よって，部分空間の位相の定義よりしたがう．■

コンパクト空間上定義された実数値連続関数について，最大値の定理を証明する．さらに，閉区間 $[a,b]$ がコンパクトであることを示して，通常の最大値の定理を導く．

命題 6.3.3（最大値の定理 (maximum value theorem)）　X を位相空間とし，

$f: X \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．A が X のコンパクト集合であり空集合でなければ，f の A への制限には最大値がある．つまり，A の元 a で，任意の $x \in A$ に対し $f(a) \geq f(x)$ をみたすものが存在する． □

命題 6.3.3 の逆は，$X = A$ でもなりたたない．反例は問題 8.3.8.5. にある．X が距離空間で A が閉集合ならば，逆もなりたつ（問題 8.3.8, 8.4.10）．

証明 $f(A)$ の上限 s が存在し，$s \in f(A)$ であることを示せばよい．実数 $r \in \mathbb{R}$ に対し，$(-\infty, r)$ の逆像 $U_r = \{x \in X \mid f(x) < r\}$ は X の開集合である．$A \subset X = \bigcup_{r\in\mathbb{R}} U_r$ であり，A はコンパクトだから，$A \subset U_{r_1} \cup \cdots \cup U_{r_n}$ をみたす実数 $r_1, \ldots, r_n$ が存在する．$A \neq \emptyset$ だから $n > 0$ である．$r = \max(r_1, \ldots, r_n)$ とおけば，$A \subset U_{r_1} \cup \cdots \cup U_{r_n} = U_r = \{x \in X \mid f(x) < r\}$ である．よって，$f(A)$ は上に有界である．$f(A)$ は空でないから，実数の連続性より，$f(A)$ の上限 s が存在する．

実数 $r < s$ に対し，閉区間 $[r, s]$ の逆像 $F_r = \{x \in X \mid r \leq f(x) \leq s\}$ は X の閉集合である．命題 3.1.4 より，$A \cap F_r \neq \emptyset$ である．$r_1, \ldots, r_n$ を $r_1 < s, \ldots, r_n < s$ をみたす任意の実数とすると，$r = \max(r_1, \ldots, r_n, s-1) < s$ とおけば，$A \cap F_{r_1} \cap \cdots \cap F_{r_n} \supset A \cap F_r \neq \emptyset$ である．A はコンパクトだから，命題 6.3.2(1)⇔(2) より，$A \cap \bigcap_{r<s} F_r \neq \emptyset$ である．$\bigcap_{r<s} F_r = \bigcap_{r<s}\{x \in X \mid r \leq f(x) \leq s\} = \{x \in X \mid f(x) = s\}$ だから，$A \cap \bigcap_{r<s} F_r = \{x \in A \mid f(x) = s\} \neq \emptyset$ であり，$s = f(a)$ をみたす元 $a \in A$ が存在する． ■

X をコンパクト空間とする．命題 6.3.3 より，実数値連続関数の空間 $C(X)$ は，有界連続関数の空間 $B(X)$ と等しい．連続関数 $f \in C(X)$ に対し，$\|f\|_\infty = \max_{x\in X} |f(x)|$ を，f の**最大値ノルム** (maximum norm) ともいう．

系 6.3.4 1. X を距離空間とする．A が X のコンパクト部分集合ならば，A は有界である．

2. A が $\mathbb{R}$ の空でないコンパクト集合ならば，A には最大元がある． □

証明 1. A が空でない場合に示せばよい．$a \in A$ とする．最大値の定理（命題 6.3.3）より，連続関数 $d(\ ,a)\colon X \to \mathbb{R}$ の A への制限には最大値 M がある．$x, y \in a$ ならば，$d(x,y) \leq d(x,a) + d(y,a) \leq 2M$ である．よって，A は有界である．

2. $\mathbb{R}$ の恒等写像に命題 6.3.3 を適用すればよい． ■

【例 6.3.5】 $n \geq 1$ なら $\mathbb{R}^n$ は有界でないからコンパクトでない．距離空間の有界部分集合はコンパクトとは限らない．たとえば，実数 $a < b$ に対し，開区間 $(a,b) \neq \emptyset$ には最大元がないからコンパクトでない．

閉区間はコンパクトであることを示す．

定理 6.3.6（ハイネ・ボレルの定理） $a \leq b$ を実数とすると，閉区間 $[a,b]$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合である． □

証明 $\mathbb{R}$ の開集合の族 $(U_i)_{i \in I}$ が $[a,b] \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ をみたすとする．

$$A = \left\{ x \in [a,b] \;\middle|\; \begin{array}{l} [a,x] \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \text{ をみたす} \\ \text{有限個の元 } i_1, \ldots, i_n \in I \text{ が存在する} \end{array} \right\}$$

とおく．$b \in A$ を示せばよい．命題 6.2.5 から $A = [a,b]$ を導くために，A が $[a,b]$ の開集合であり，閉集合でもあることを示す．A の $[a,b]$ の部分集合としての内部を A° で表わす．$\overline{A} \subset A^\circ$ を示せばよい．

$x \in \overline{A}$ とする．$x \in \overline{A} \subset [a,b] \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ だから，$x \in U_{i_0}$ をみたす $i_0 \in I$ がある．U_{i_0} は x の開近傍だから，$U_r(x) \subset U_{i_0}$ をみたす実数 $r > 0$ がある．$x \in \overline{A}$ だから，$y \in A \cap U_r(x)$ がある．$[a,y] \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ とすると，$[a, x+r) \subset [a,y] \cup (x-r, x+r) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \cup U_{i_0}$ である．よって，$[a, x+r) \cap [a,b] \subset A$ である．$U_r(x) \cap [a,b]$ は $x \in [a,b]$ の開近傍であり，$U_r(x) \cap [a,b] = (x-r, x+r) \cap [a,b] \subset [a, x+r) \cap [a,b] \subset A$ だから，x は A

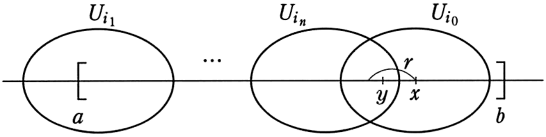


図 6.2 $[a,y] \cup (x-r, x+r) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \cup U_{i_0}$

の内点である．よって，$x \in A^\circ$ である．

したがって，A は $[a,b]$ の開集合であり閉集合でもある．命題 6.2.5 より $[a,b]$ は連結であり，命題 6.2.3(1)⇒(4) より $A=[a,b]$ または $A=\emptyset$ である．$a \in A \neq \emptyset$ だから，$A=[a,b]$ である． ■

系 6.3.7 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．f の最大値 M と最小値 m が存在し，$f([a,b])=[m,M]$ である． □

証明 定理 6.3.6 より，閉区間 $[a,b]$ はコンパクトである．よって，命題 6.3.3 より，f の最大値 M が存在する．$-f$ の最大値 M' も存在し，$m=-M'$ は f の最小値である．

$f([a,b]) \subset [m,M]$ であり，系 6.2.6.1. より，$f([a,b]) \supset [m,M]$ である．

■

距離空間がコンパクトであるための条件を調べる．

定義 6.3.8 X を距離空間とする．

1. X が**全有界** (totally bounded) であるとは，任意の実数 $r>0$ に対し，$X=U_r(a_1)\cup\cdots\cup U_r(a_n)$ をみたす有限個の元 $a_1,\ldots,a_n \in X$ が存在することをいう．

2. $(U_i)_{i\in I}$ を X の開被覆とする．実数 $r>0$ が次の条件 (L) をみたすとき，r は $(U_i)_{i\in I}$ の**ルベーグ数** (Lebesgue number) であるという．

(L) : 任意の空でない部分集合 $A \subset X$ に対し，A の直径が r 以下ならば，$A \subset U_i$ をみたす $i \in I$ が存在する． □

$A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ とおけば，条件 $X=U_r(a_1)\cup\cdots\cup U_r(a_n)$ は，任意の $x\in X$ に対し $d(x,A)<r$ ということである．全有界な距離空間は有界である（問題 6.3.5）．

命題 6.3.9 X を距離空間とする．次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) X はコンパクトである．

(2) X は全有界であり，X の任意の開被覆 $(U_i)_{i\in I}$ に対し，$(U_i)_{i\in I}$ のルベーグ数が存在する． □

証明 (1)⇒(2): X はコンパクトであるとする．X が全有界であることを示す．$r > 0$ を任意の実数とする．$(U_r(x))_{x\in X}$ は X の開被覆だから，$X = U_r(a_1) \cup \cdots \cup U_r(a_n)$ をみたす有限個の元 $a_1, \ldots, a_n \in X$ が存在する．

X の任意の開被覆 $(U_i)_{i\in I}$ に対し，そのルベーグ数が存在することを示す．$X = \emptyset$ ならば，任意の実数 $r > 0$ は $(U_i)_{i\in I}$ のルベーグ数である．よって，X は空でないとして示せばよい．

$$B = \{(x, r) \in X \times (0, \infty) \mid U_{2r}(x) \subset U_i \text{ をみたす } i \in I \text{ が存在する }\}$$

とすると，$(U_r(x))_{(x,r)\in B}$ も X の開被覆である．X はコンパクトだから，$X = U_{r_1}(x_1) \cup \cdots \cup U_{r_n}(x_n)$ をみたす有限個の対 $(x_1, r_1), \ldots, (x_n, r_n) \in B$ が存在する．$X \neq \emptyset$ だから $n \geq 1$ である．

$r = \min(r_1, \ldots, r_n) > 0$ が $(U_i)_{i\in I}$ のルベーグ数であることを示す．$A \subset X$ を直径が r 以下の空でない部分集合とし，$a \in A$ とする．$a \in U_{r_j}(x_j)$ をみたす $j = 1, \ldots, n$ が存在する．$A \subset \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\} \subset U_{2r}(x_j)$ だから，$U_{2r}(x_j) \subset U_i$ をみたす $i \in I$ は，$A \subset U_i$ をみたす．

(2)⇒(1): $(U_i)_{i\in I}$ を X の任意の開被覆とし，$r > 0$ を $(U_i)_{i\in I}$ のルベーグ数とする．$a_1, \ldots, a_n$ が $X = U_{\frac{r}{2}}(a_1) \cup \cdots \cup U_{\frac{r}{2}}(a_n)$ をみたすとする．$U_{\frac{r}{2}}(x)$ の直径は r 以下だから，$U_{\frac{r}{2}}(a_1) \subset U_{i_1}$，…，$U_{\frac{r}{2}}(a_n) \subset U_{i_n}$ をみたす $i_1, \ldots, i_n \in I$ が存在する．このとき，$X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ である． ■

まとめ

・任意の開被覆に対し有限部分被覆が存在する位相空間を，コンパクト空間とよぶ．

・実数値連続関数のコンパクト集合での値について，最大値の定理がなりたつ．

・ℝ の閉区間はコンパクトである．

・距離空間がコンパクトであるための条件は，全有界であり任意の開被覆にルベーグ数があることである．

問題

A 6.3.1 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を収束する実数列とし，$b = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおく．$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする．

1. $B = A \cup \{b\}$ はコンパクトであることを示せ．
2. A がコンパクトならば，$b \in A$ であることを示せ．

A 6.3.2 下の文は，X の部分集合 A がコンパクトでないことのいいかえとして，誤った文である．正しい文に直せ．

X の開集合の族 $(U_i)_{i\in I}$ で $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ をみたし，さらに I の有限個の元 $i_1, \ldots, i_n$ と A の元 x で，$x \notin U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ となるものが存在する．

A 6.3.3 $\mathbb{R}$ の開集合の族 $(U_i)_{i\in I}$ で，$(0,1] \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ をみたし，任意の有限部分集合 $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ に対し $(0,1] \not\subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ となるものを 1 つ与えよ．

A 6.3.4 定理 6.3.6 の証明で，閉区間 $[a,b]$ を半閉区間 $[a,b)$ あるいは $(a,b]$ でおきかえると，命題 6.2.5 のかわりに命題 6.2.12 を使っても証明がうまくいかなくなるところを，それぞれの場合にみつけよ．

A 6.3.5 X を距離空間とする．X が全有界なら，X は有界であることを示せ．

B 6.3.6 1. 自然数 n に対し，写像 $q_n\colon 2^{\mathbb{N}} \to 2^n$ を，$q_n((x_m)) = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ で定める．(p_n) を，写像 $p_n\colon 2^n \to 2 = \{0,1\}$ の列で次の条件 (1) と (2) をみたすものとする．

(1) 任意の $x \in 2^{\mathbb{N}}$ に対し，$p_n(q_n(x)) = 1$ をみたす n が存在する．

(2) 任意の $n \geq 0$ と任意の $x \in 2^n$ に対し，$p_{n+1}((x,0)) = p_{n+1}((x,1)) = 1$ ならば $p_n(x) = 1$ である．

このとき，$p_0 = 1$ であることを示せ．

2. 離散空間 $2 = \{0,1\}$ の積空間 $2^{\mathbb{N}}$ は，コンパクトであることを（定理 6.4.8 を使わずに）示せ．

6.4 コンパクト性と積位相

コンパクト集合の定義を，積位相を使っていいかえる．このいいかえを使って，コンパクト集合の基本的な性質を導く．

命題 6.4.1 X を位相空間とし，A を X の部分集合とする．次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) A はコンパクトである．

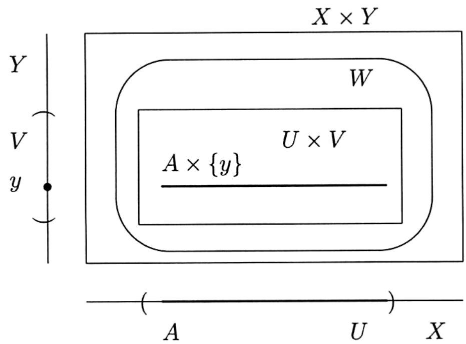


図 **6.3**　$A \times \{y\} \subset U \times V \subset W$

(2) Y を任意の位相空間とし，$y \in Y$ を任意の点とする．$A \times \{y\}$ の任意の開近傍 $W \subset X \times Y$ に対し，A の開近傍 $U \subset X$ と y の開近傍 $V \subset Y$ で，$U \times V \subset W$ をみたすものが存在する．

(3) Y を任意の位相空間とし，$y \in Y$ を任意の点とする．$A \times \{y\}$ の任意の開近傍 $W \subset X \times Y$ に対し，y の開近傍 $V \subset Y$ で，$A \times V \subset W$ をみたすものが存在する．　□

命題 6.4.1 は，積空間での開近傍について，コンパクト集合は 1 点だけからなる集合と同じ性質をみたすことを表わしている．

証明　(1)⇒(2): $W \subset X \times Y$ を $A \times \{y\}$ の開近傍とする．積位相の特徴づけ（命題 5.3.2.1.）より，任意の $x \in A$ に対し，$U \times V \subset W$ をみたす x の開近傍 $U \subset X$ と y の開近傍 $V \subset Y$ がある．よって，$\mathcal{W} = \{(U, V) \in P(X) \times P(Y) \mid U$ は X の開集合，V は y の開近傍で，$U \times V \subset W\}$ とおくと，$A \times \{y\} \subset \bigcup_{(U,V) \in \mathcal{W}} (U \times V) \subset W$ であり，$A \subset \bigcup_{(U,V) \in \mathcal{W}} U$ である．

A はコンパクトだから，$\mathcal{W}$ の有限個の元 $(U_1, V_1), \ldots, (U_n, V_n)$ で，$A \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$ をみたすものが存在する．A の開近傍 U と y の開近傍 V を $U = U_1 \cup \cdots \cup U_n$, $V = V_1 \cap \cdots \cap V_n$ で定めれば，$A \times \{y\} \subset U \times V = (U_1 \times V) \cup \cdots \cup (U_n \times V) \subset (U_1 \times V_1) \cup \cdots \cup (U_n \times V_n) \subset W$ である．

(2)⇒(3): $U \times V \subset W$ ならば，$A \subset U$ より $A \times V \subset W$ である．

(3)⇒(1): $(U_i)_{i \in I}$ を X の開集合の族で，$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ をみたすものとする．

$Y = \mathbb{S}^I$ を積空間とし，$y = (1)_{i\in I} \in Y = \{0,1\}^I$ を定数関数 $1\colon I \to 2$ とする．$i \in I$ に対し，Y の開集合 $V_i = \{(s_j) \in \{0,1\}^I \mid s_i = 1\}$ を，第 i 成分への射影 $\mathrm{pr}_i\colon Y \to \mathbb{S}$ による逆像 $\mathrm{pr}_i^{-1}(1)$ と定め，$X \times Y$ の開集合 W を $W = \bigcup_{i\in I}(U_i \times V_i)$ で定義する．任意の $i \in I$ に対し，$\mathrm{pr}_i(y) = 1$ であり $y \in V_i$ である．よって，$(X \times \{y\}) \cap W = \bigcup_{i\in I}(U_i \times (\{y\} \cap V_i)) = \bigcup_{i\in I} U_i \times \{y\}$ である．$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ より，$A \times \{y\} \subset W$ であり，W は $A \times \{y\}$ の開近傍である．(3) より，$A \times V \subset W$ をみたす開近傍 $1 \in V \subset Y$ が存在する．

I の有限部分集合 J に対し，V_J を Y の開集合 $\{1\}^J \times \mathbb{S}^{I\setminus J}$ とする．$\mathbb{S}$ の空でない開集合は $\{1\}$ と $\mathbb{S}$ のどちらかしかないから，Y の積位相の特徴づけ（命題 5.3.7.1.）より，I の有限部分集合 J で，$y \in V_J \subset V$ をみたすものが存在する．J の特性関数 $\chi_J = ((1)_{i\in J}, (0)_{i\in I\setminus J})$ は V_J の元だから，$A\times\{\chi_J\} \subset A\times V \subset W$ である．$(X \times \{\chi_J\}) \cap W = \bigcup_{i\in J} U_i \times \{\chi_J\}$ だから，$A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$ である．$J = \{i_1, \ldots, i_n\}$ とすれば，$A \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ である． ■

命題 6.4.1 から，コンパクト集合の有限個の合併や，閉集合との共通部分は，コンパクトであることを導く．

系 6.4.2 X を位相空間とする．

1. $A \subset X$ をコンパクト集合とする．B が X の閉集合ならば，$A\cap B$ もコンパクト集合である．とくに，X がコンパクト空間なら，X の閉集合 $B = X\cap B$ はコンパクト集合である．

2. $A_1, \ldots, A_n$ が X の有限個のコンパクト集合ならば，合併 $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ もコンパクト集合である． □

A_1, A_2 が位相空間 X のコンパクト集合でも，X がハウスドルフでなければ，共通部分 $A_1 \cap A_2$ はコンパクト集合とは限らない（問題 6.4.4）．X がハウスドルフなら，$A_1 \cap A_2$ はコンパクトであることを，命題 6.5.3.2. で示す．

証明 Y を任意の位相空間とし，$y \in Y$ を任意の点とする．

1. $W \subset X \times Y$ を $(A \cap B) \times \{y\}$ の開近傍とする．$W \cup ((X \setminus B) \times Y)$ は $A \times \{y\}$ の開近傍だから，命題 6.4.1(1)⇒(3) より，y の開近傍 $V \subset Y$ で，$A \times V \subset W \cup ((X \setminus B) \times Y)$ をみたすものがある．$(A \cap B) \times V \subset W$ だか

ら，命題 6.4.1(3)⇒(1) より，$A \cap B$ はコンパクトである．

2. $W \subset X \times Y$ を $(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \times \{y\}$ の開近傍とする．命題 6.4.1(1)⇒(3) より，y の開近傍 $V_1, \ldots, V_n \subset Y$ で，$A_1 \times V_1 \subset W, \ldots, A_n \times V_n \subset W$ をみたすものがある．$V = V_1 \cap \cdots \cap V_n \subset Y$ は y の開近傍であり，$(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \times V \subset W$ をみたす．よって，命題 6.4.1(3)⇒(1) より，$A_1 \cup \cdots \cup A_n$ はコンパクトである．■

コンパクト集合の連続写像による像もコンパクトである．

系 6.4.3　X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．$A \subset X$ をコンパクト集合とすると，$f(A) \subset Y$ もコンパクト集合である．□

証明　Z を任意の位相空間とし，$z \in Z$ を任意の点とする．$W \subset Y \times Z$ を，$f(A) \times \{z\}$ の開近傍とする．$(f \times 1)^{-1}(W) \subset X \times Z$ は $A \times \{z\}$ の開近傍だから，命題 6.4.1(1)⇒(3) より，z の開近傍 $V \subset Z$ で $A \times V \subset (f \times 1)^{-1}(W)$ をみたすものが存在する．このとき，$f(A) \times V \subset W$ だから，命題 6.4.1(3)⇒(1) より，$f(A)$ は Y のコンパクト集合である．■

コンパクト空間を，射影についての条件で特徴づける．

命題 6.4.4　位相空間 X について次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) X はコンパクトである．

(2) 任意の位相空間 Y に対し，第 2 射影 $\mathrm{pr}_2\colon X \times Y \to Y$ は閉写像である．□

よりみち 85　命題 6.4.4 の条件 (2) は，1 点からなる空間 P へのただ 1 つの写像 $X \to P$ が，**固有** (proper) とよばれる性質をみたすことを表わしている．

証明　命題 6.4.1 より，(1) は，$X = A$ に対し命題 6.4.1 の条件 (3) がなりたつことと同値である．条件 (3) を，閉集合でいいかえる．

Y を任意の位相空間とする．$F = (X \times Y) \setminus W$ とおけば，$X \times Y$ の開集合 W を考えることと，$X \times Y$ の閉集合 F を考えることは同じことであ

る．さらに，$y \in Y$ に対し，$X \times \{y\} = \mathrm{pr}_2^{-1}(y)$ だから，$X \times \{y\} \subset W$ は，$\mathrm{pr}_2^{-1}(y) \cap F = \emptyset$ と同値である．これは $y \notin \mathrm{pr}_2(F)$ ということであり，$y \in Y \setminus \mathrm{pr}_2(F)$ と同値である．同様に，$V \subset Y$ に対し，$X \times V \subset W$ は，$\mathrm{pr}_2^{-1}(V) \cap F = \emptyset$ と同値であり，$V \subset Y \setminus \mathrm{pr}_2(F)$ と同値である．

したがって，$X = A$ に対し，命題 6.4.1 の条件 (3) は，次の条件と同値である．

(3′) Y を任意の位相空間とする．$X \times Y$ の任意の閉集合 F と，任意の点 $y \in Y \setminus \mathrm{pr}_2(F)$ に対し，y の開近傍 $V \subset Y$ で，$V \subset Y \setminus \mathrm{pr}_2(F)$ をみたすものが存在する．

これは，任意の位相空間 Y と任意の閉集合 $F \subset X \times Y$ に対し，$\mathrm{pr}_2(F)$ は Y の閉集合であるということである．よって，(2) と同値である． ■

コンパクト集合の積もコンパクトである．

系 6.4.5 X と Y を位相空間とする．$A \subset X$ と $B \subset Y$ がコンパクト集合なら，$A \times B \subset X \times Y$ もコンパクト集合である． □

証明 命題 6.3.2(1)⇔(3) より，$A = X, B = Y$ として示せばよい．Z を任意の位相空間とする．命題 6.4.4(1)⇒(2) より，射影 $\mathrm{pr}_{23} \colon X \times Y \times Z \to Y \times Z$ と射影 $\mathrm{pr}_2 \colon Y \times Z \to Z$ は閉写像である．よって，合成 $\mathrm{pr}_3 = \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{pr}_{23} \colon X \times Y \times Z \to Z$ も閉写像である．命題 6.4.4(2)⇒(1) より，$X \times Y$ はコンパクトである．

■

命題 6.4.6 $\mathbb{R}^n$ の有界な閉集合は，コンパクトである． □

証明 定理 6.3.6 より，閉区間 $[-N, N]$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合である．したがって，系 6.4.5 より，その積 $[-N, N]^n$ も $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合である．A を $\mathbb{R}$ の有界閉集合とすると，$A \subset [-N, N]^n$ をみたす自然数 N が存在する．A はコンパクト集合 $[-N, N]^n$ の閉部分集合だから，系 6.4.2.1. より，コンパクトである． ■

命題 6.4.6 の逆もなりたつことを，次節で証明する．

【例 6.4.7】　球面 S^{n-1} は $\mathbb{R}^n$ の有界な閉集合だからコンパクトである．

射影空間への標準全射 $p\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ の，球面 S^{n-1} への制限 $p|_{S^{n-1}}\colon S^{n-1} \to \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ は，連続全射である．S^{n-1} はコンパクトだから，$\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ もコンパクトである．

同様に，$\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ もコンパクトである．

定理 6.4.8（チコノフの定理）AC　$(X_i)_{i\in I}$ をコンパクト空間の族とする．このとき，積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ はコンパクトである．□

チコノフの定理は，8.1 節で証明する．そこまでは，チコノフの定理を使わないので，循環論法の心配はない．

まとめ

・コンパクト集合であるための条件を，積位相を使っていいかえた．

・コンパクト集合の，有限個の合併，積，連続写像による像，閉集合との共通部分は，どれもコンパクトである．

・$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合は，コンパクトである．

・コンパクト空間であるための条件は，任意の位相空間との積からの射影が閉写像であることである．

・射影空間はコンパクトである．

問題

A 6.4.1　n を自然数とし，$a \in \mathbb{R}^n$ とする．関数 $d(a,\ )\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を，$x \in \mathbb{R}^n$ を $d(a,x) \in \mathbb{R}$ にうつすことで定める．$A \subset \mathbb{R}^n$ を空でない閉集合とする．関数 $d(a,\ )$ の A への制限には，最小値があることを示せ．

A 6.4.2　1. W を，$\mathbb{R}\times\{0\}$ の開近傍 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |xy|<1\}$ とする．0 の開近傍 $V\subset\mathbb{R}$ で，$\mathbb{R}\times V\subset W$ をみたすものは存在しないことを示せ．

2. 1. と命題 6.4.1 から，$\mathbb{R}$ がコンパクトでないことを導け．

3. 命題 6.4.4 と問題 4.3.5 から，$\mathbb{R}$ がコンパクトでないことを導け．

A 6.4.3　1. T^n はコンパクトであることを示せ．

2. $O(n,\mathbb{R})$ はコンパクトであることを示せ．

A 6.4.4　$X=[0,1]\times\mathbb{S}$ とし，$A = X\setminus\{(0,1)\}$ とおく．

1. 任意の位相空間 Y に対し，$Y \times \{0\} \subset Y \times \mathbb{S}$ の開近傍は，$Y \times \mathbb{S}$ だけであることを示せ．

2. A はコンパクト集合であることを示せ．

3. $B = [0,1] \times \{1\} \subset X$ もコンパクトだが，共通部分 $A \cap B$ はコンパクトでないことを示せ．

B 6.4.5　1. 問題 6.3.6.1. と命題 6.4.1 から，$2^{\mathbb{N}}$ がコンパクトであることを導け．

2. 1. と例題 5.3.8, 系 6.4.3 から，ハイネ・ボレルの定理（定理 6.3.6）を導け．

よりみち 86　問題 6.4.5.2. のハイネ・ボレルの定理の証明は，**区間縮小法** (argument of nested intervals) によるものである．

B 6.4.6　命題 6.4.1 から，最大値の定理（命題 6.3.3）を導け．

B 6.4.7　$n \geq 1$ を自然数とする．長さが定める写像 $\| \ \| \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ は，閉写像であることを示せ．

B 6.4.8　1. X を空でないコンパクト空間とし，Y を位相空間，$f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$y \in Y$ に対し，関数 $g_y \colon X \to \mathbb{R}$ を $g_y(x) = f(x,y)$ で定める．$y \in Y$ を g_y の最大値 $M(y)$ にうつす関数 $M \colon Y \to \mathbb{R}$ は，連続であることを示せ．

2. $X = (0,1], Y = [0,1]$ とする．連続関数 $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ で，任意の $y \in Y$ に対し，$g_y(x) = f(x,y)$ で定まる関数 $g_y \colon X \to \mathbb{R}$ の最大値 $M(y)$ が存在し，さらに，$y \in Y$ を $M(y)$ にうつす関数 $M \colon Y \to \mathbb{R}$ は連続でないものの例を 1 つ与えよ．

B 6.4.9　X と T を位相空間とし，写像 $f \colon T \to X$ について，次の条件 (1) と (2) を考える．

(1) f は連続である．

(2) f のグラフ $\Gamma = \{(t,x) \in T \times X \mid f(t) = x\}$ は積空間 $T \times X$ の閉集合である．

1. X がコンパクトなら，(2) $\Rightarrow$ (1) がなりたつことを示せ．

2. 連続でない関数 $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ で，(2) をみたすものの例をあげよ．

BP 6.4.10　X と Y を距離空間とし，d_X と d_Y をそれぞれの距離とする．$f \colon X \to Y$ を連続写像とする．X がコンパクトなら，次の条件がみたされることを示せ．

任意の実数 $q > 0$ に対し，実数 $r > 0$ で，$d_X(x,x') < r$ をみたす任意の $x, x' \in X$ に対し，$d_Y(f(x), f(x')) < q$ をみたすものが存在する．

よりみち 87　距離空間から距離空間への写像 f が，問題 6.4.10 の条件をみたすとき，f は**一様連続** (uniformly continuous) であるという．

6.5　コンパクト性とハウスドルフ空間

コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続写像は閉写像であるという重要な性質を証明する．ハウスドルフ空間 X の部分集合 A に対し，閉包 $\overline{A}$ の中での補集合 $\overline{A} \setminus A$ の点を，A から抜けている点と考えると，この性質は，コンパクト空間には欠落がないということを表わしている．

命題 6.5.1　X を位相空間，Y をハウスドルフ空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．

1. X がコンパクトならば，f は閉写像である．
2. A が X のコンパクト集合ならば，$f(A)$ は Y の閉集合である．　□

証明　1. $A \subset X$ を閉集合として，$f(A) \subset Y$ が閉集合であることを示す．$\Gamma = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subset X \times Y$ を f のグラフとし，$\mathrm{pr}_1\colon X \times Y \to X$ と $\mathrm{pr}_2\colon X \times Y \to Y$ を射影とする．$f(A) = \mathrm{pr}_2(\mathrm{pr}_1^{-1}(A) \cap \Gamma)$ である．Y がハウスドルフだから，命題 6.1.6 より，Γ は $X \times Y$ の閉集合である．$\mathrm{pr}_1^{-1}(A)$ は $X \times Y$ の閉集合だから，$\mathrm{pr}_1^{-1}(A) \cap \Gamma$ も $X \times Y$ の閉集合である．X がコンパクトなら，命題 6.4.4 より，$\mathrm{pr}_2\colon X \times Y \to Y$ は閉写像である．よって，$f(A) = \mathrm{pr}_2(\mathrm{pr}_1^{-1}(A) \cap \Gamma)$ は Y の閉集合である．

2. 1. より，f の A への制限 $f|_A\colon A \to Y$ は閉写像であり，$f(A)$ は Y の閉集合である．　■

コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続全単射は，同相写像である．

系 6.5.2　X をコンパクト空間，Y をハウスドルフ空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．

1. f が全単射ならば，f は同相写像である．
2. f が単射ならば，$f\colon X \to Y$ は閉うめこみである．
3. 像 $f(X)$ は Y の閉集合であり，f がひきおこす可逆写像 $\bar{f}\colon X/R_f \to f(X)$ は，X の商空間 X/R_f から Y の部分空間 $f(X)$ への同相写像である．　□

証明 1. 命題 6.5.1.1. より，$f\colon X \to Y$ は閉写像でもある．よって，同相写像である．

2. 命題 6.5.1.1. より，$f\colon X \to Y$ は閉写像でもある．よって，閉うめこみである．

3. 命題 6.5.1 より，$f(X)$ は閉集合である．系 6.4.3 より商空間 X/R_f はコンパクトであり，系 6.1.5 より部分空間 $f(X)$ はハウスドルフである．よって，1. より，$\bar{f}$ は同相写像である． ■

ハウスドルフ位相より細かい位相は，ハウスドルフであり，コンパクト位相より粗い位相は，コンパクトである．したがって，コンパクト・ハウスドルフ位相は，ハウスドルフ位相の中で極小であり，コンパクト位相の中で極大である．

ハウスドルフ空間の部分集合のコンパクト性について，次がなりたつ．

命題 6.5.3 X をハウスドルフ空間とする．

1. X の部分集合 A について次の条件 (1) と (2) を考える．

(1) A はコンパクト集合である．

(2) A は閉集合である．

(1) ならば (2) である．X がコンパクト空間ならば，(1) と (2) は同値である．

2. A_1 と A_2 が X のコンパクト集合なら，共通部分 $A_1 \cap A_2$ も X のコンパクト集合である． □

証明 1. (1)⇒(2): X の恒等写像に，命題 6.5.1.2. を適用すればよい．

(2)⇒(1): 系 6.4.2.1. より，コンパクト空間の閉集合はコンパクトである．

2. 1.(1)⇒(2) より，A_2 は X の閉集合である．よって，$A_1 \cap A_2$ はコンパクト集合 A_1 の閉集合である．1.(2)⇒(1) より，$A_1 \cap A_2$ もコンパクトである． ■

コンパクト空間のコンパクト集合は，閉集合であるとは限らない．たとえば，$\mathbb{S}$ のコンパクト集合 $\{1\}$ は閉集合ではない．

$\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とは，有界閉集合のことである．

系 6.5.4　X を距離空間とし，X の部分集合 A について，次の条件 (1) と (2) を考える．

(1) A はコンパクトである．

(2) A は有界な閉集合である．

(1) ならば (2) である．$X = \mathbb{R}^n$ ならば，(1) と (2) は同値である．□

証明　(1)⇒(2): A がコンパクトならば，系 6.3.4.1. より，A は有界である．距離空間 X はハウスドルフだから，命題 6.5.3.1. より，そのコンパクト集合は閉集合である．

(2)⇒(1) は命題 6.4.6 で示した．■

ハウスドルフ空間のコンパクト集合を 1 点につぶして得られる空間を調べる．

命題 6.5.5　X をハウスドルフ空間とし，$A \subset X$ を空でないコンパクト集合とする．A を 1 点につぶして得られる空間 Y は，ハウスドルフである．

さらに，X がコンパクトなら Y もコンパクトである．□

証明　$q\colon X \to Y$ を商写像とし，$q(A) = \{c\}$ とする．$Y \setminus \{c\}$ は開集合であり，q の制限 $X \setminus A \to Y \setminus \{c\}$ は同相写像である．開部分空間 $Y \setminus \{c\} \subset Y$ は，X の部分空間と同相だからハウスドルフである．よって，任意の $x \in X \setminus A$ に対し，c の開近傍 $U \subset Y$ と $q(x)$ の開近傍 $V \subset Y$ で $U \cap V = \emptyset$ をみたすものが存在することを示せばよい．

X はハウスドルフで $x \notin A$ だから，$W = (X \times X) \setminus \Delta_X$ は $A \times \{x\}$ の開近傍である．A はコンパクトだから，命題 6.4.1 より，A の開近傍 $\widetilde{U}$ と x の開近傍 $\widetilde{V}$ で，$\widetilde{U} \times \widetilde{V} \subset W$ をみたすものが存在する．$\widetilde{U} \cap \widetilde{V} = \emptyset$ であり，$U = q(\widetilde{U}), V = q(\widetilde{V})$ とおけば $\widetilde{U} = q^{-1}(U), \widetilde{V} = q^{-1}(V)$ だから，$U \cap V = \emptyset$ である．さらに，U は c の開近傍であり，V は $q(x)$ の開近傍である．よって，Y はハウスドルフである．

X がコンパクトなら，系 6.4.3 より，Y もコンパクトである．■

系 6.5.6　X がコンパクト・ハウスドルフ空間ならば，X は正規である．

□

証明 A, B を，$A \cap B = \emptyset$ をみたす X の空でない閉集合とし，A の開近傍 U と B の開近傍 V で，$U \cap V = \emptyset$ をみたすものが存在することを示す．系 6.4.2.1. より A はコンパクトだから，A を 1 点につぶして得られる空間 Y は，命題 6.5.5 より，ハウスドルフである．B もコンパクトだから，系 6.4.3 より，商写像 $q\colon X \to Y$ による像 $B' = q(B)$ はコンパクトである．よって命題 6.5.5 より，Y で B' を 1 点につぶして得られる空間 Z もハウスドルフである．

$p\colon X \to Z$ を q と商写像 $q'\colon Y \to Z$ の合成 $q' \circ q$ とし，$a, b \in Z$ を $p^{-1}(a) = A, p^{-1}(b) = B$ で定まる点とする．$a \neq b$ だから，a の開近傍 $U' \subset Z$ と b の開近傍 $V' \subset Z$ で，$U' \cap V' = \emptyset$ をみたすものが存在する．$U = p^{-1}(U'), V = p^{-1}(V')$ とおけばよい． ■

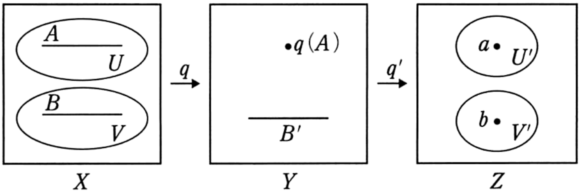


図 **6.4** $A \cap B = \emptyset$ と $U' \cap V' = \emptyset$

まとめ

・ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は，閉集合である．

・$\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とは，有界閉集合のことである．

・コンパクト集合からハウスドルフ空間への連続写像は閉写像であり，連続単射は閉うめこみであり，連続全単射は同相写像である．

・ハウスドルフ空間のコンパクト集合を 1 点につぶして得られる空間はハウスドルフである．

・コンパクト・ハウスドルフ空間の，たがいに交わらない閉集合は，開集合で分離できる．

問題

A 6.5.1 $n \geq 1$ を自然数とする．$f\colon \mathbb{R} \to S^1 = T^1$ を $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ で定める．積写像 $f^n\colon \mathbb{R}^n \to T^n$ がひきおこす写像 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to T^n$ は，同相写像であることを示せ．

A 6.5.2 $X = S^1 \times [0,1]$ を積空間とし，X の開集合 U と閉集合 A を，それぞれ $U = S^1 \times [0,1)$ と $A = S^1 \times \{0\}$ で定める．X の部分集合 A を 1 点につぶして得られる空間を $\overline{X}$ で表わし，U の部分集合 A を 1 点につぶして得られる空間を $\overline{U}$ で表わす．

1. 連続写像 $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ を，$f((x,y),t) = (tx, ty)$ で定める．f は同相写像 $\bar{f}\colon \overline{X} \to D^2$ をひきおこすことを示せ．

2. f の U への制限 $g\colon U \to \mathbb{R}^2$ は，開うめこみ $\bar{g}\colon \overline{U} \to \mathbb{R}^2$ をひきおこすことを示せ．

B 6.5.3 $f\colon (0,1] \to [0,1]$ を連続関数とし，$\Gamma \subset (0,1] \times [0,1]$ をそのグラフ，$\overline{\Gamma} \subset [0,1] \times [0,1]$ を Γ の閉包とする．

1. $A = \{y \in [0,1] \mid (0,y) \in \overline{\Gamma}\}$ とおく．$A = [a,b]$ をみたす実数 $a \leq b$ が存在することを示せ．

2. 次の条件 (1)–(4) は同値であることを示せ．

(1) 極限 $\lim_{t \to 0} f(t)$ が存在する．

(2) f を延長する連続関数 $\bar{f}\colon [0,1] \to [0,1]$ が存在する．

(3) $\overline{\Gamma}$ は関数 $[0,1] \to [0,1]$ のグラフである．

(4) $\overline{\Gamma}$ は弧状連結である．

3. $[0,1] \times [0,1]$ の連結な閉部分集合で，弧状連結ではないものの例をあげよ．

B 6.5.4 $3 = \{0,1,2\}$ を離散空間とし，$e_3\colon 3^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ を，3 進小数展開が定める無限積空間 $3^{\mathbb{N}}$ からの連続写像（例題 5.3.8）とする．$2 = \{0,1\}$ を離散空間とし，無限積空間 $2^{\mathbb{N}}$ からの連続写像 $c_3\colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ を，$c_3((a_n)) = 2e_3((a_n)) = e_3((2a_n))$ で定める．

1. $c_3(2^{\mathbb{N}}) \subset [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ を示せ．

2. c_3 は閉うめこみであることを示せ．

よりみち 88 問題 6.5.4 の単射 $c_3\colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ の像 $c_3(2^{\mathbb{N}}) \subset \mathbb{R}$ を，**カントル集合** (Cantor set) という．

B 6.5.5 問題 6.1.4 の連続単射 $\overline{V}\colon \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \to S^{n^2-1}$ は，閉うめこみであることを示せ．

B 6.5.6 $X = [0,1] \times [0,1], Y = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid x \leq y\}$ とし，連続写像 $f\colon X \to Y$ を $f(x,y) = (xy, y)$ で定める．

1. $[0,1] \times \{0\} \subset X$ を 1 点につぶして得られる空間を X' とする．$f\colon X \to Y$ は同

相写像 $X' \to Y$ をひきおこすことを示せ.

2. $U = X \setminus ((0,1] \times \{0\})$ とする. $V = \{(x,y) \in Y \mid 2x < y$ または $x = 0\}$ は, $f|_U : U \to Y$ による像位相について, 開集合であることを示せ.

3. 包含写像 $U \to X$ がひきおこす連続全単射 $U \to X'$ は, 同相写像でないことを示せ.

C 6.5.7 1. $4 = \{0,1,2,3\}$ を離散空間とする. $(a_n) \in 4^{\mathbb{N}}$ に対し, $(b_n) \in 4^{\mathbb{N}}$ を

$$b_n = \begin{cases} 4 - a_n & a_n = 1,3 \text{ かつ } b_k = 0 \text{ となる } 0 \leq k < n \text{ の個数が奇数}, \\ 2 - a_n & a_n = 0,2 \text{ かつ } b_k = 3 \text{ となる } 0 \leq k < n \text{ の個数が奇数}, \\ a_n & \text{それ以外} \end{cases}$$

で, 帰納的に定める. 同相写像 $\tilde{p}\colon 4^{\mathbb{N}} \to 4^{\mathbb{N}}$ を, $\tilde{p}((a_n)) = (b_n)$ で定める. 写像 $\pi_1, \pi_2 : 4 \to 2$ を, $(\pi_1(0), \pi_2(0)) = (0,0)$, $(\pi_1(1), \pi_2(1)) = (0,1)$, $(\pi_1(2), \pi_2(2)) = (1,1)$, $(\pi_1(3), \pi_2(3)) = (1,0)$ で定める. 同相写像 $q\colon 4^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ を, $q((a_n)) = ((\pi_1(a_n)), (\pi_2(a_n)))$ で定める. $e_2 : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, $e_4 : 4^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ を, それぞれ 2 進小数展開と 4 進小数展開が定める連続全射 (例題 5.3.8) とする. 連続写像 $p\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ で, 図式

$$\begin{array}{ccccc} 4^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\tilde{p}} & 4^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{q} & 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \\ {\scriptstyle e_4}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle e_2 \times e_2} \\ [0,1] & & \xrightarrow{p} & & [0,1] \times [0,1] \end{array}$$

が可換になるものがただ 1 つ存在することを示せ.

2. 連続全単射 $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ は存在しないことを示せ.

3. 1. で定義した写像 p は, 全射だが単射でないことを示せ.

よりみち 89 問題 6.5.7 で定義したような連続全射 $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ を, ペアノ曲線 (Peano curve) という.

6.6 局所コンパクト空間とコンパクト化 *

ハウスドルフ空間がコンパクトでないとは, 欠けているところがあるということである. 欠けた部分を補って, コンパクトにできるための条件を調べる.

定義 6.6.1 X をハウスドルフ空間とする.

1. X の部分集合 A の閉包 $\overline{A}$ がコンパクトであるとき, A は**相対コンパク**

ト (relatively compact) であるという．

2. X の任意の点 $x \in X$ に対し，x の相対コンパクトな開近傍 U が存在するとき，X は**局所コンパクト** (locally compact) であるという．

3. Y がコンパクト・ハウスドルフ空間であり，$f\colon X \to Y$ が開うめこみであるとき，Y は，f により，X の**コンパクト化** (compactification) であるという．さらに，補集合 $Y \setminus f(X)$ が 1 点だけからなるとき，Y は X の **1 点コンパクト化** (one-point compactification) であるという．Y が X の 1 点コンパクト化であるとき，$Y \setminus f(X)$ のただ 1 つの点を，**無限遠点** (point of infinity) という． □

ハウスドルフ空間 X の部分集合 A が相対コンパクトであるための条件は，命題 6.5.3.1. より，A を部分集合として含むコンパクト集合 $K \subset X$ が存在することである．距離空間の相対コンパクトな部分集合は，有界である．コンパクトなハウスドルフ空間は局所コンパクトである．離散空間も局所コンパクトである．局所コンパクト空間は正規とは限らない（問題 8.3.8.6.）．したがって，正規空間の開部分空間も正規とは限らない（命題 6.6.3）．1 点コンパクト化を，アレクサンドロフのコンパクト化ともよぶ．Y が X のコンパクト化で $Y \supsetneqq f(X)$ ならば，$Y \setminus f(X)$ を 1 点につぶして得られる空間は，命題 6.5.5 より，X の 1 点コンパクト化である．

【例 6.6.2】　1. $n \geq 1$ なら，$\mathbb{R}^n$ はコンパクトではないが，局所コンパクトである．コンパクト空間 $X = [0,1] \times [0,1]$ の部分空間 $X \setminus (\{0\} \times (0,1])$ は局所コンパクトでない（問題 6.6.1）．

2. 立体射影 $p\colon S^n \setminus \{(0,\cdots,0,1)\} \to \mathbb{R}^n$ の逆写像により，S^n は $\mathbb{R}^n$ の 1 点コンパクト化である．

3. 問題 5.4.8 の開うめこみ $j_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ により，射影空間 $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト化である．$n = 1$ なら 1 点コンパクト化であり，$n \geq 2$ なら 1 点コンパクト化ではない．$\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ についても同様である．

コンパクト化が存在するための条件は，局所コンパクトであることであることを示す．

命題 6.6.3　X をハウスドルフ空間とする．次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) X は局所コンパクトである.

(2) X のコンパクト化が存在する.

(3) X の 1 点コンパクト化が存在する. □

よりみち 90　コンパクト・ハウスドルフ空間は，そうでない空間と比べて扱いやすい空間である．局所コンパクト空間は，そのコンパクト化を考えることで，コンパクト・ハウスドルフ空間からコンパクト部分集合を取り除いたものとして扱うことができる.

（証明の前に）命題 6.6.3 の核心部分は (1)⇒(3) である．これは，局所コンパクト空間に対し，その 1 点コンパクト化を構成することで証明する．1 点コンパクト化の位相の定め方は，次の補題 6.6.4 より，一意的である．その定め方で実際に位相が定まり，その位相に関して 1 点コンパクト化になっていることを確認することで，(1)⇒(3) を証明する.

補題 6.6.4　X を局所コンパクト空間とし，$f\colon X \to Y$ を X の 1 点コンパクト化とする．$\{c\} = Y \setminus f(X)$ とおくと，次がなりたつ.

$$\{U \in P(Y) \mid U \text{ は } Y \text{ の開集合で } c \notin U\} = \{f(V) \mid V \text{ は } X \text{ の開集合}\},$$

$$\{U \in P(Y) \mid U \text{ は } Y \text{ の開集合で } c \in U\}$$
$$= \{Y \setminus f(A) \mid A \text{ は } X \text{ のコンパクト集合}\}. \quad \square$$

証明　$f\colon X \to Y$ は開うめこみだから，c を元として含まない部分集合 $U \subset Y$ が開集合であるための条件は，U が X の開集合の像であることである．Y はコンパクト・ハウスドルフだから，部分集合 $U \subset Y$ が開集合であるための条件は，命題 6.5.3.1. より，$Y \setminus U$ がコンパクトであることである．$c \in U$ とすると，$Y \setminus U$ は $f^{-1}(Y \setminus U)$ と同相だから，これは，U が X のコンパクト集合の像の補集合であることと同値である. ■

補題 6.6.4 より，$f\colon X \to Y$ と $f'\colon X \to Y'$ が 1 点コンパクト化ならば，$g\colon Y \to Y'$ を $f' = g \circ f$ をみたすただ 1 つの可逆写像とすると，g は同相写像である.

命題 6.6.3 の証明 (2)⇒(1): X が，コンパクト・ハウスドルフ空間 Y の閉集合 A の補集合 $Y \setminus A$ であるとして，X が局所コンパクトであることを示せばよい．$x \in X$ とすると，系 6.5.6 より，Y は正規だから，x の開近傍 U と A の開近傍 V で，$U \cap V = \emptyset$ をみたすものが存在する．$U \subset K = Y \setminus V \subset X = Y \setminus A$ であり，K は Y の閉集合だから，命題 6.5.3.1. よりコンパクトである．

(1)⇒(3): X を局所コンパクト空間として，その 1 点コンパクト化を構成する．問題 4.1.4 を使って示す．

$Y = X \amalg \{c\}$ とする．$\mathcal{O}_X$ を X の開集合系とし，$\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{O}_X \mid X \setminus V$ は X のコンパクト集合 $\}$ とおく．Y の巾集合の部分集合 $\mathcal{O}$ を，$\mathcal{O} = \mathcal{O}_X \cup \{V \amalg \{c\} \mid V \in \mathcal{V}\}$ とおく．$\mathcal{O}$ は Y の位相であり，包含写像 $i: X \to Y$ は開うめこみであることを示す．$\mathcal{V}$ が問題 4.1.4.1. の条件 (1) と (2) をみたすことを示す．

$U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{V}, U \supset V$ とすると，X の閉集合 $X \setminus U$ はコンパクト集合 $X \setminus V$ の部分集合だから系 6.4.2.1. よりコンパクトである．よって，$U \in \mathcal{V}$ である．$(V_i)_{i \in I}$ を $\mathcal{V}$ の元の有限族とすると，$X \setminus \bigcap_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I}(X \setminus V_i)$ は，系 6.4.2.2. よりコンパクトである．よって，$\bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}$ である．したがって，問題 4.1.4.4. より $\mathcal{O}$ は Y の位相であり，問題 4.1.4.3. より包含写像 $i: X \to Y$ は開うめこみである．

$x \in X$ とすると，x の開近傍 $U \subset X$ とコンパクト集合 K で，$x \in U \subset K \subset X$ をみたすものが存在する．$V = Y \setminus K$ は c の開近傍で，$U \cap V = \emptyset$ である．$i: X \to Y$ は開うめこみで $Y \setminus X = \{c\}$ である．X はハウスドルフだから，Y もハウスドルフである．

Y がコンパクトであることを示す．Z を任意の位相空間とし，$z \in Z$ を任意の点とする．$W \subset Y \times Z$ を $Y \times \{z\}$ の任意の開近傍とする．積位相の特徴づけ（命題 5.3.2）より，$c \in Y$ の開近傍 U と $z \in Z$ の開近傍 V で，$U \times V \subset W$ をみたすものが存在する．$U \cap X \in \mathcal{V}$ だから，補集合 $A = Y \setminus U = X \setminus (U \cap X)$ はコンパクトである．W は $A \times \{z\}$ の開近傍だから，命題 6.4.1(1)⇒(3) より，$z \in Z$ の開近傍 V' で，$A \times V' \subset W$ をみたすものが存在する．$V \cap V'$ は $z \in Z$ の開近傍で，$Y \times (V \cap V') \subset (U \times V) \cup (A \times V') \subset W$ をみたす．よって，命題 6.4.1(3)⇒(1) より，Y はコンパクトである．

(3)⇒(2): X の 1 点コンパクト化は，X のコンパクト化である． ■

$\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ は例 6.4.7 よりコンパクトであり，問題 6.1.4 と同様にハウスドルフである．連続単射 $j\colon \mathbb{C} \to \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ を $j(z) = (z : 1)$ で定める．問題 5.4.8.2. より，写像 $j\colon \mathbb{C} \to \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ は，開うめこみである．補集合 $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \setminus j(\mathbb{C})$ は，1 点 $\infty = (1 : 0)$ だけからなるから，$\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ の 1 点コンパクト化である．このことから，代数学の基本定理を導く．

定理 6.6.5（**代数学の基本定理** (fundamental theorem of algebra)） $f = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[X]$ を複素数係数の多項式とする．f が定数でなければ，方程式 $f(X) = 0$ の複素数解 $X = z \in \mathbb{C}$ が存在する． □

まず，次の補題を示す．

補題 6.6.6 1. $f \in \mathbb{C}[X]$ を複素数係数の多項式とすると，$f(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ の閉集合である．

2. U を $\mathbb{C}$ の連結開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．f が定数関数でなければ，f は開写像である． □

証明 1. f が定数でない場合に示せばよい．f の最高次係数が 1 であるとしてよいから，$f = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$ とおく．連続写像 $\tilde{f}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を $\tilde{f}(z, w) = (z^n + a_1z^{n-1}w + \cdots + a_nw^n, w^n)$ で定める．$\tilde{f}(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ であり，$a \in \mathbb{C}^\times$ なら $\tilde{f}(az, aw) = a^n\tilde{f}(z, w)$ だから，$\tilde{f}$ の $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ への制限は，連続写像 $\bar{f}\colon \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ をひきおこす．$\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ はコンパクト・ハウスドルフだから，命題 6.5.1 より，$\bar{f}(\mathbf{P}^1(\mathbb{C}))$ は $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ の閉集合である．$z \in \mathbb{C}$ に対し，$\bar{f}(j(z)) = j(f(z))$ であり，$\bar{f}(\infty) = \infty$ である．よって，$f(\mathbb{C}) = j^{-1}(\bar{f}(\mathbf{P}^1(\mathbb{C})))$ は閉集合である．

2. V を U の開集合とし，$f(V)$ が $\mathbb{C}$ の開集合であることを示す．$a \in V$ とする．問題 4.1.5 より，$f^{-1}(f(a))$ は U の離散部分集合である．実数 $r > 0$ で，$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$ とおくと，$D \subset V$ かつ $D \cap f^{-1}(f(a)) = \{a\}$ をみたすものがある．$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ はコンパクトだから，最小値 $m = \min_{z \in C} |f(z) - f(a)|$ が存在する．$f(a) \notin f(C)$ だから $m = d(f(a), f(C)) > 0$ である．

$U_{\frac{m}{2}}(f(a)) \subset f(V)$ を示せばよい．$w \in U_{\frac{m}{2}}(f(a))$ とすると，

$$\min_{z \in C} |f(z) - w| = d(w, f(C)) \geq d(f(a), f(C)) - d(f(a), w) > \frac{m}{2},$$
$$\min_{z \in D} |f(z) - w| \leq |f(a) - w| < \frac{m}{2}$$

である．$w \notin f(V)$ だったとすると，V で定義された正則関数 $f(z)-w$ は零点がないことになるから，最大値の原理（問題 6.6.11.2.）より，$\min_{z \in D} |f(z)-w| = \min_{z \in C} |f(z) - w|$ となる．これは，矛盾である．■

定理 6.6.5 の証明　補題 6.6.6.2. より，$f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は開写像であり，$f(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ の開集合である．補題 6.6.6.1. より，$f(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ の閉集合でもある．$\mathbb{C}$ は連結で，$f(\mathbb{C})$ は空でないから，$f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ である．■

まとめ
- 各点のコンパクトな近傍があるようなハウスドルフ空間を，局所コンパクト空間という．
- 局所コンパクト空間に 1 点をつけ加えることで，コンパクト空間を構成できる．
- 射影直線のコンパクト性から，代数学の基本定理が導かれる．

問題

A 6.6.1　コンパクト空間 $[0,1] \times [0,1]$ の部分空間 $([0,1] \times [0,1]) \setminus (\{0\} \times (0,1])$ を A とし，U を $(0,0) \in A$ の任意の開近傍とする．U を含む A のコンパクト集合は存在しないことを示せ．

A 6.6.2　(a_n) を収束する実数列とし，$b = \lim_{n \to \infty} a_n$ とおく．写像 $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ を $f(n) = a_n$ で定める．f が単射であり，$b \notin f(\mathbb{N})$ であるとする．$\mathbb{R}$ の部分空間 $X = f(\mathbb{N}) \amalg \{b\}$ は，f に関して，離散空間 $\mathbb{N}$ の 1 点コンパクト化であることを示せ．

A 6.6.3　$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ と考え，その 1 点コンパクト化を，例 6.6.2 のように立体射影により，S^2 と考える．写像 $j \colon \mathbb{C} \to \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ を，$j(z) = (z : 1)$ で定める．j が定める同相写像 $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \to S^2$ による，$(z : w) \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ の像は，

$$\left(\frac{2\mathrm{Re}\ z\overline{w}}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{2\mathrm{Im}\ z\overline{w}}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{|z|^2 - |w|^2}{|z|^2 + |w|^2} \right)$$

であることを示せ．

よりみち 91 問題 6.6.3 の同相写像 $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \to S^2$ により S^2 を $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ と同一視するとき，S^2 を**リーマン球面** (Riemann sphere) という．

A 6.6.4 $n \geq 1$ を自然数とする．$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ とする．$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \subset D^n$ を 1 点につぶして得られる空間を X とする．X は S^n と同相であることを示せ．

A 6.6.5 X をコンパクトでない局所コンパクト空間とし，$f\colon X \to Y$ を 1 点コンパクト化とする．

1. $f(X)$ は Y で稠密であることを示せ．
2. X が連結なら，Y も連結であることを示せ．

A 6.6.6 1. $n \in \mathbb{N}$ に対し，$e_n \in l^\infty$ を，第 n 成分が 1 でそれ以外は 0 という元とし，$C = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおく．$C \subset l^\infty$ は有界閉集合だが，コンパクトでないことを示せ．

2. l^∞ の単位閉球 $B = \{x \in l^\infty \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$ はコンパクトでないことを示せ．

3. l^∞ は局所コンパクトでないことを示せ．

B 6.6.7 1. X を $\mathbb{R}$ の部分空間 $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ とする．開うめこみ $X \to [-1, 1]$ で，$[-1, 1]$ が X の 1 点コンパクト化となるものを与えよ．

2. Y を $\mathbb{R}^2$ の部分空間 $\{-1, 1\} \times \mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R}^2$ の部分空間 $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}$ への開うめこみ $Y \to V$ で，V が Y の 1 点コンパクト化となるものを与えよ．

3. Z を $\mathbb{R}^2$ の部分空間 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$ とする．$\mathbb{R}^2$ の部分空間 $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+1)^2 = 1\}$ への開うめこみ $Z \to W$ で，W が Z の 1 点コンパクト化となるものを与えよ．

B 6.6.8 1. $X = (0, 1] \times \{0, 1, \ldots, n-1\}$ から $\mathbb{R}^2$ へのうめこみ $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ で，像の閉包 $\overline{f(X)}$ が X の 1 点コンパクト化となるものを与えよ．

2. $X = (0, 1] \times \mathbb{N}$ から $\mathbb{R}^2$ へのうめこみ $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ で，像の閉包 $\overline{f(X)}$ が X の 1 点コンパクト化となるものを与えよ．

B 6.6.9 X を局所コンパクト空間とする．Y をハウスドルフ空間とし，$f\colon X \to Y$ を開うめこみとする．$g\colon X \to Z$ を 1 点コンパクト化とし，$c \in Z$ を無限遠点とする．写像 $p\colon Y \to Z$ を，$g = p \circ f$ と $p^{-1}(c) = Y \setminus f(X)$ をみたすただ 1 つの写像とする．p は連続であることを示せ．

C 6.6.10 X をハウスドルフ空間とする．X の部分空間 A について，次の条件 (1) と (2) を考える．

(1) A は局所コンパクトである．

(2) A は，A の閉包 $\overline{A}$ の開集合である．

1. X が局所コンパクト空間ならば，(2)⇒(1) がなりたつことを示せ．(ヒント：X のコンパクト化を使う．)

2. (1)⇒(2) がなりたつことを示せ．

C 6.6.11（最大値の原理 (maximum modulus principle)） U を $\mathbb{C}$ の連結開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{C}$ を定数ではない正則関数とする．

1. $|f|\colon U \to [0,\infty)$ には最大値がないことを示せ．

2. $a \in U, r > 0$ とし，$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$ は U の部分集合であるとする．$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$ とおく．$\max_{z\in D}|f(z)| = \max_{z\in C}|f(z)|$ を示せ．$f(z)=0$ をみたす $z \in D$ がなければ，$\min_{z\in D}|f(z)| = \min_{z\in C}|f(z)|$ であることを示せ．

第 7 章 濃度

有限集合は，その元を数えれば個数がわかる．無限集合は，その元を数えつくすことはできないが，元が 1 対 1 に対応する 2 つの集合の大きさは同じと考えることができる．このようにして，無限集合の大きさを比較するのが，濃度の考えである．

7.1 節では，有限集合や，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と大きさが同じ無限集合を調べる．7.2 節では，2 つの集合の濃度が等しいということを定義し，集合の巾集合の濃度は，もとの集合の濃度より真に大きいことを，対角線論法で示す．7.3 節では，選択公理と同値であり，数学のいろいろな分野の基礎で使われるツォルンの補題を証明し，その濃度や無限集合への応用を解説する．

7.1 自然数と可算集合

集合が有限集合であるとは，その集合の元を数えつくせることである．これは，次のように定式化できる．自然数 n は，帰納的に $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ として定義されていたことを思い出しておこう．自然数全体の集合 $\{0, 1, \ldots\}$ を $\mathbb{N}$ で表わす．

定義 7.1.1 X を集合とする．自然数 n と全単射 $n = \{0, 1, \ldots, n-1\} \to X$ が存在するとき，X は**有限集合** (finite set) であるという．X が有限集合でないとき，X は**無限集合** (infinite set) であるという． □

有限集合の元の個数が確定することを示す．

命題 7.1.2 1. n, m を自然数とし，$f\colon n \to m$ を全単射とする．このとき，

$n = m$ である．

2. 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は無限集合である． □

証明　1. n に関する帰納法で示す．$n = 0$ なら m も 0 である．$n > 0$ とし，$f\colon n \to m$ を全単射とする．$n, m \neq 0$ だから，$n-1 \in n, m-1 \in m$ である．$f(n-1) = l \in m$ とおく．$g\colon m \to m$ を

$$g(i) = \begin{cases} i & i \neq l, m-1 \text{ のとき}, \\ l & i = m-1 \text{ のとき}, \\ m-1 & i = l \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める．$g^2 = \mathrm{id}_m$ だから，g は全単射である．よって，$g \circ f$ も全単射である．$g \circ f(n-1) = g(l) = m-1$ だから，$g \circ f$ は全単射 $n-1 = n \setminus \{n-1\} \to m-1 = m \setminus \{m-1\}$ をひきおこす．よって，帰納法の仮定より $n-1 = m-1$ であり，したがって $n = m$ である．帰納法により，すべての自然数 n に対し，1. がなりたつ．

2. n に関する帰納法で，全単射 $n \to \mathbb{N}$ が存在しないことを示す．$\mathbb{N}$ は空集合ではないから，全単射 $0 \to \mathbb{N}$ は存在しない．$n > 0$ とし，全単射 $f\colon n \to \mathbb{N}$ が存在したとする．$f(n-1) = m$ とおき，全単射 $g\colon \mathbb{N} \setminus \{m\} \to \mathbb{N}$ を，

$$g(i) = \begin{cases} i & i \leq m-1 \text{ のとき}, \\ i-1 & i > m \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める．$f|_{n-1}\colon n-1 = n \setminus \{n-1\} \to \mathbb{N} \setminus \{m\}$ は全単射だから，合成 $g \circ f|_{n-1}\colon n-1 \to \mathbb{N}$ も全単射である．これは，帰納法の仮定に反するから，全単射 $f\colon n \to \mathbb{N}$ は存在しない．帰納法により，すべての自然数 n に対し，全単射 $n \to \mathbb{N}$ は存在しない． ■

定義 7.1.3　X を集合とする．

1. n を自然数とする．全単射 $n \to X$ が存在するとき，n を X の**濃度** (cardinality, power) とよび，$n = \mathrm{Card}\, X$ と表わす．X の濃度を X の**基数**とよぶこともある．

2. 全単射 $\mathbb{N} \to X$ が存在するとき，X は**可算** (countable) 無限集合である

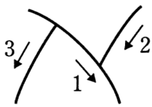
といい，Card $X = \aleph_0$ と表わす．ω と表わすこともある．

X が有限集合であるか可算無限集合であるとき，X は可算であるという．

□

よりみち 92　可算無限集合と可算集合のことを，それぞれ可算集合とたかだか可算集合とよぶ本も多いので，注意が要る．

$\aleph$（アレフ）はヘブライ文字のアルファベットの最初の文字であり，



のように書く．

【例 7.1.4】　$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を，

$$f(n) = \begin{cases} m & n = 2m \text{ のとき}, \\ -m & n = 2m - 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義すると，f は全単射である．よって，$\mathbb{Z}$ は可算無限集合である．

$\mathbb{N}$ の部分集合は可算である．これを示すには，小さいほうから順に番号をつければよい．

命題 7.1.5　部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ に対し，関数 $C_A\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を，帰納的に，$C_A(0) = 0$ と

$$C_A(m+1) = \begin{cases} C_A(m) + 1 & m \in A \text{ のとき}, \\ C_A(m) & m \notin A \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める．

1. n を自然数とし，$A \subset n$ を部分集合とする．このとき，Card $A = C_A(n) \leq n$ であり，C_A の A への制限は全単射 $C_A|_A\colon A \to \text{Card } A$ を定める．$C_A(n) = n$ ならば，$A = n$ である．

2. $A \subset n$ をみたす自然数 n は存在しないと仮定する．このとき，C_A の A への制限 $C_A|_A\colon A \to \mathbb{N}$ は全単射である．□

証明　1. n に関する帰納法で示す．$n=0$ ならば，$A=\emptyset$ であり，$C_A(0)=0=\emptyset$ である．よって，このときは全単射 $C_A|_A\colon A\to C_A(n)=\mathrm{Card}\ A$ が得られる．

$n\geq 1$ とし，$A'=A\cap(n-1)$ とおく．帰納法の仮定より，$C_{A'}|_{A'}\colon A'\to \mathrm{Card}\ A'$ は全単射であり $C_{A'}(n-1)=\mathrm{Card}\ A'\leq n-1$ である．$C_A|_n=C_{A'}|_n$ だから，

$$C_A(n)=\begin{cases}C_{A'}(n-1)+1=\mathrm{Card}\ A'+1 & n-1\in A\text{ のとき},\\ C_{A'}(n-1)=\mathrm{Card}\ A' & n-1\notin A\text{ のとき}\end{cases}$$

である．よって，どちらの場合も $C_A|_A\colon A\to \mathrm{Card}\ A$ は全単射であり，$C_A(n)=\mathrm{Card}\ A\leq n$ である．さらに，$C_A(n)=n$ ならば，$n-1\in A$ であり，$C_A(n-1)=n-1$ である．よって，帰納法の仮定より，$A'=n-1$ であり，$A=n$ である．したがって，n に関する帰納法により示された．

2. 自然数 n に対し，$A_n=A\cap n$ とおく．任意の自然数 n に対し $A_n\subsetneqq A$ とする．$x,y\in A$ ならば，$n=\max(x,y)+1\in\mathbb{N}$ とおけば $x,y\in A_n$ である．$C_A|_{A_n}=C_{A_n}|_{A_n}$ だから，1. より，制限 $C_A|_A\colon A\to\mathbb{N}$ は単射である．全射であることを示す．任意の自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対し，$n\in C_A(A)$ を，n に関する帰納法で示す．

$A=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}A_m\neq\emptyset$ だから，$A_m\neq\emptyset$ をみたす自然数 m が存在する．1. より，$C_A(A_m)=\mathrm{Card}\ A_m>0$ だから，$0\in C_A(A_m)\subset C_A(A)$ である．$n>0$ とする．帰納法の仮定より，$n-1=C_A(m)$ をみたす $m\in A$ がある．$n=C_A(m+1)$ である．$A_{m+1}\subsetneqq A$ だから，$m'\in A$, $m'>m$ が存在する．$m'\geq m+1$ だから，$C_A(m')\geq C_A(m+1)=n$ であり，$n\in n+1\subset C_A(m')+1=C_A(m'+1)=C_A(A_{m'+1})\subset C_A(A)$ である．よって，n に関する帰納法により，$\mathbb{N}\subset C_A(A)$ である．■

系 7.1.6　$A\subset\mathbb{N}$ を部分集合とする．

1. A は可算集合である．さらに，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) $A\subset n$ をみたす自然数 n が存在する．

(2) A は有限集合である．

2. A が空でなければ，全単射 $C_A|_A\colon A\to C_A(A)$ による，$0\in C_A(A)$ の逆像 $l\in A$ は，A の最小元である．□

証明 1. 命題 7.1.5 より，A は可算集合である．命題 7.1.5.1. より，(1)⇒(2) がなりたつ．命題 7.1.5.2. と命題 7.1.2.2. より，(2)⇒(1) の対偶がなりたつ．

2. $m, n \in A$ に対し，$m \leq n$ と $C_A(m) \leq C_A(n)$ は同値である．$0 \in C_A(A)$ は最小元だから，その逆像 $l_A \in A$ は最小元である． ■

系 7.1.7 $f\colon X \to Y$ を写像とする．

1. $f\colon X \to Y$ が単射であるとする．Y が可算集合なら X も可算集合である．

Y が有限集合なら X も有限集合であり，$\mathrm{Card}\, X \leq \mathrm{Card}\, Y$ である．さらにこのとき，$\mathrm{Card}\, X = \mathrm{Card}\, Y$ ならば，f は全単射である．

2. $f\colon X \to Y$ が全射であるとする．X が可算集合なら Y も可算集合である．

X が有限集合なら Y も有限集合であり，$\mathrm{Card}\, X \geq \mathrm{Card}\, Y$ である．さらにこのとき，$\mathrm{Card}\, X = \mathrm{Card}\, Y$ ならば，f は全単射である． □

証明 1. Y が可算集合ならば，全単射 $g\colon Y \to n$ か全単射 $g\colon Y \to \mathbb{N}$ が存在する．よって，$Y = n$ かまたは $Y = \mathbb{N}$ としてよい．さらに，f は全単射 $X \to f(X)$ を定めるから，X は $Y \subset \mathbb{N}$ の部分集合 A であるとしてよい．命題 7.1.5 より，A は可算集合である．

さらに命題 7.1.5.1. より，$Y = n$ なら $X = A \subset n$ も有限集合であり，$\mathrm{Card}\, X = C_A(n) \leq \mathrm{Card}\, Y = n$ である．$C_A(n) = n$ ならば，$A = n$ である．

2. X が可算集合ならば，全単射 $g\colon X \to n$ か全単射 $g\colon X \to \mathbb{N}$ が存在する．よって，$X = A \subset \mathbb{N}$ と考えてよい．各 $y \in Y$ に対し，$A_y = f^{-1}(y) \subset \mathbb{N}$ は空でないから，系 7.1.6.2. より，最小元 $l_{A_y} \in A_y \subset X$ が定まる．写像 $h\colon Y \to X$ を，$h(y) = l_{A_y}$ で定める．$f \circ h = \mathrm{id}_Y$ だから，$h\colon Y \to X$ は単射である．よって，1. より，Y は可算集合である．

X が有限集合なら，Y も有限集合であり，$\mathrm{Card}\, Y \leq \mathrm{Card}\, X$ である．さらに，$\mathrm{Card}\, Y = \mathrm{Card}\, X$ なら，h は全単射である．このとき，$f = h^{-1}$ も全単射である． ■

集合 X に対し，$F(X) = \{A \in P(X) \mid A \text{ は有限集合 }\}$ とおく．

命題 7.1.8 有限部分集合 $A \in F(\mathbb{N})$ に対し，自然数 $b(A) = \sum_{m\in A} 2^m$ を対応させる写像 $b\colon F(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ は全単射である． □

証明 命題 7.1.5 より，$F(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P(n)$ である．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $n < 2^n$ だから，$\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} 2^n$ である．b の $P(n)$ への制限 $b|_{P(n)}$ は，全単射 $b_n\colon P(n) \to 2^n$ を定めることを示せばよい．$\chi_n\colon P(n) \to \mathrm{Map}(n, 2)$ を，特性関数を対応させることで定まる可逆写像とし，写像 $s_n\colon \mathrm{Map}(n, 2) \to 2^n$ を $s_n(f) = \sum_{m=0}^{n-1} f(m)2^m$ で定めると，$b_n = s_n \circ \chi_n$ である．よって，s_n が全単射であることを，n に関する帰納法で示せばよい．

$n = 0$ のときは，$\mathrm{Map}(0, 2)$ は包含写像だけからなり，$2^0 = 1 = \{0\}$ である．写像 $t_n\colon \mathrm{Map}(n+1, 2) \to \mathrm{Map}(n, 2) \times 2$ を $t_n(f) = (f|_n, f(n))$ で定め，写像 $u_n\colon 2^n \times 2 \to 2^{n+1}$ を $u_n(x, y) = x + 2^n y$ で定めると，t_n と u_n は全単射である．s_{n+1} は，

$$\mathrm{Map}(n+1, 2) \xrightarrow{t_n} \mathrm{Map}(n, 2) \times 2 \xrightarrow{s_n \times \mathrm{id}_2} 2^n \times 2 \xrightarrow{u_n} 2^{n+1}$$

の合成だから，帰納法の仮定より全単射である．よって帰納法により，任意の自然数 n に対し，$s_n\colon \mathrm{Map}(n, 2) \to 2^n$ は，全単射である．したがって，$b\colon F(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ は全単射である． ■

$n = \sum_{m\in A} 2^m$ を，自然数 $n = b(A)$ の **2 進表示** (binary presentation) という．

系 7.1.9 1. $n \geq 1$ ならば，$\mathbb{N}^n$ は可算無限集合である．

2. $\mathbb{Q}$ も可算無限集合である．

3. X と Y が可算集合ならば，$X \times Y$ も可算集合である． □

証明 1. $\mathbb{N}^{n*} = \{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n \mid m_1 < m_2 < \cdots < m_n\}$ とおき，写像 $f_n\colon \mathbb{N}^{n*} \to F(\mathbb{N})$ を $f_n(m_1, \ldots, m_n) = \{m_1, \ldots, m_n\}$ で定めると，f_n は単射であり，像は $\{A \in F(\mathbb{N}) \mid \mathrm{Card}\ A = n\}$ である．写像 $g_n\colon \mathbb{N}^{n*} \to \mathbb{N}^n$ を，

$$g_n(m_1, \ldots, m_n) = (m_1,\ m_2 - (m_1 + 1), \ldots,\ m_n - (m_{n-1} + 1))$$

で定めると，g_n は可逆である．よって，任意の自然数 n に対し，$\mathbb{N}^n$ は可算である．$n \geq 1$ なら，$\mathbb{N}^n$ は無限集合である．

2. $(n,m) \in \{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \mid m > 0\}$ を $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ にうつす写像 $\{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \mid m > 0\} \to \mathbb{Q}$ は全射である．1. より $\mathbb{Z}^2$ は可算だから，系 7.1.7 より，$\mathbb{Q}$ も可算である．$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ だから，$\mathbb{Q}$ は無限集合である．

3. 単射 $f\colon X \to \mathbb{N}$ と単射 $g\colon Y \to \mathbb{N}$ の積 $f \times g\colon X \times Y \to \mathbb{N}^2$ は，単射である．1. より，$\mathbb{N}^2$ は可算集合だから，$X \times Y$ も可算集合である． ■

よりみち 93 系 7.1.9.1. の証明の可逆写像 g_n は，重複組み合わせを重複のない組み合わせを使って数えるときの方法で定義したものである．

まとめ
- 有限集合の濃度は，その元の個数である．
- 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ からの全単射がある集合を，可算無限集合という．
- $\mathbb{N}^n$ $(n \geq 1)$ や $\mathbb{Z}$ は可算無限集合である．

問題

A 7.1.1 X と Y を有限集合とし，元の個数をそれぞれ m, n とする．Y^X も有限集合で，元の個数は n^m となることを示せ．

A 7.1.2 巾集合 $P(\mathbb{N})$ からそれ自身への写像 $f\colon P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ を，A が有限集合なら $f(A) = \mathrm{Card}\ A$, A が無限集合なら $f(A) = \mathbb{N}$ で定める．

1. $f(A) = f(B)$ は，全単射 $A \to B$ が存在することと同値であることを示せ．

2. 像 $f(P(\mathbb{N})) \subset P(\mathbb{N})$ は，$\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ であり，f が定める同値関係に関する完全代表系であることを示せ．

A 7.1.3 1. 命題 7.1.8 の全単射 $b\colon F(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ と系 7.1.9.1. の証明の写像 $f_2\colon \mathbb{N}^{2*} \to F(\mathbb{N})$, $g_2\colon \mathbb{N}^{2*} \to \mathbb{N}^2$ を考える．合成 $h_2 = b \circ f_2 \circ g_2^{-1}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ の像を A とおき，$C_A|_A\colon A \to \mathbb{N}$ を，命題 7.1.5 で定めた全単射とする．合成写像 $C_A|_A \circ h_2\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ を求め，全単射であることを確かめよ．

2. $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$ は有限集合 $\}$ とおく．写像 $g\colon \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{N}$ を次のように定める．$g(0) = 0$ とする．$a = (a_n) \neq 0$ で，m が，$a_n \geq 1$ となる最大の自然数 n であるとき，$g(a) = 2^{a_0}(1 + 2^{a_1+1}(1 + \cdots (1 + 2^{a_{m-1}+1}(1 + 2^{a_m}))\cdots)$ $(m > 0)$, $g(a) = 2^{a_0}$ $(m = 0)$ と定める．g は全単射であることを示せ．

B 7.1.4 X と Y を可算集合とする．$F(X \times Y)$ と $\coprod_{A \in F(X)} \mathrm{Map}(A, Y)$ も可算集合

であることを示せ．

BP 7.1.5 [AC] $(X_i)_{i\in I}$ を集合族とする．I は可算であり，すべての $i \in I$ に対し X_i は可算であるとする．このとき，$\bigcup_{i\in I} X_i$ は可算であることを示せ．

7.2 濃度

無限集合の元の個数を自然数で表わすことはできないが，どちらが多くの元を含むか比較することができる．

定義 7.2.1 X と Y を集合とする．

1. 全単射 $X \to Y$ が存在するとき，X の濃度と Y の濃度は等しいといい，$\mathrm{Card}\ X = \mathrm{Card}\ Y$ と書く．X の濃度と Y の濃度が等しいとき，X と Y は**対等** (equipotent) であるともいう．
2. 単射 $X \to Y$ が存在するとき，X の濃度は Y の濃度以下であるといい，$\mathrm{Card}\ X \leq \mathrm{Card}\ Y$ と書く． □

$\mathrm{Card}\ X \leq \mathrm{Card}\ Y$ であるが $\mathrm{Card}\ X = \mathrm{Card}\ Y$ ではないとき，$\mathrm{Card}\ X < \mathrm{Card}\ Y$ と書く．濃度について，基本的な性質を 2 つ証明する．次の定理により，$\mathrm{Card}\ X \leq \mathrm{Card}\ Y$ かつ $\mathrm{Card}\ Y \leq \mathrm{Card}\ X$ ならば，$\mathrm{Card}\ X = \mathrm{Card}\ Y$ である．

命題 7.2.2（ベルンシュタインの定理） $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to X$ を単射とする．このとき，全単射 $h\colon X \to Y$ が存在する． □

証明 自然数 $n \geq 0$ に対し，X の部分集合 X_n と Y の部分集合 Y_n を，$X_0 = X, Y_0 = Y$ と $X_{n+1} = g(Y_n)$，$Y_{n+1} = f(X_n)$ で帰納的に定める．$X_0 = X \supset g(Y) = X_1$，$Y_0 = Y \supset f(X) = Y_1$ だから，n に関する帰納法により，

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_n \supset X_{n+1} \supset \cdots,$$
$$Y = Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_n \supset Y_{n+1} \supset \cdots$$

が示される（図 7.1）．したがって，f の $X_n \setminus X_{n+1}$ への制限は全単射

$f_n\colon X_n \setminus X_{n+1} \to Y_{n+1} \setminus Y_{n+2}$ を定め，g の $Y_n \setminus Y_{n+1}$ への制限は全単射 $g_n\colon Y_n \setminus Y_{n+1} \to X_{n+1} \setminus X_{n+2}$ を定める．

$$X' = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (X_{2m} \setminus X_{2m+1}), \quad X'' = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (X_{2m+1} \setminus X_{2m+2}), \quad X_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n,$$
$$Y' = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (Y_{2m} \setminus Y_{2m+1}), \quad Y'' = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (Y_{2m+1} \setminus Y_{2m+2}), \quad Y_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_n$$

とおく．$X = X' \amalg X'' \amalg X_\infty, Y = Y' \amalg Y'' \amalg Y_\infty$ である．

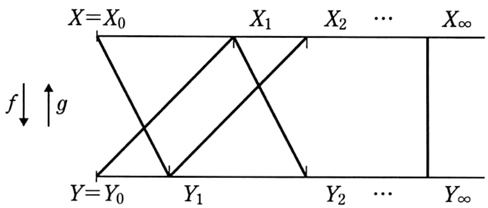


図 7.1 $X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_\infty$ と $Y = Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_\infty$

$f(X') = Y''$, $g(Y') = X''$ であり，f と g の制限はそれぞれ全単射 $f'\colon X' \to Y''$, $g'\colon Y' \to X''$ を定める．f は単射だから，$f(X_\infty) = f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(X_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_{n+1} = Y_\infty$ である．したがって，f の制限は全単射 $f_\infty\colon X_\infty \to Y_\infty$ を定める．全単射 $f'\colon X' \to Y'', (g')^{-1}\colon X'' \to Y', f_\infty\colon X_\infty \to Y_\infty$ の無縁和として，全単射 $h\colon X \to Y$ が得られる． ■

命題 7.2.3 X を集合とする．Card $X <$ Card $P(X)$ である． □

証明 $x \in X$ に対し $\{x\} \in P(X)$ を対応させる写像は単射である．よって，Card $X \leq$ Card $P(X)$ である．全射 $f\colon X \to P(X)$ が存在したとして矛盾を導く．$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in P(X)$ とおく．f は全射だから，$A = f(a)$ をみたす $a \in X$ が存在する．$a \in A$ とすると，A の定義より $a \notin f(a) = A$ である．ところが $a \notin A$ とすると，A の定義より $a \in f(a) = A$ である．よって矛盾である． ■

よりみち 94 命題 7.2.3 の証明にでてきた部分集合 $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \subset X$ の構成は，次のようにいいかえられる．巾集合 $P(X)$ を写像の集

合 2^X と同一視し，さらに写像 $f\colon X \to 2^X$ を，$F(x,y) = f(x)(y)$ で定まる写像 $F\colon X \times X \to 2$ と同一視する．このとき，F と対角写像 $\delta\colon X \to X \times X$ の合成 $g = F \circ \delta\colon X \to 2 = \{0,1\}$ は，A の補集合の特性関数である．命題 7.2.3 の証明は，このように，対角集合に着目するものなので，この証明法をカントルの**対角線論法** (diagonal argument) という．

系 7.2.4　$\mathrm{Card}\ \mathbb{N} < \mathrm{Card}\ 2^{\mathbb{N}} = \mathrm{Card}\ \mathbb{R}$ である．　□

証明　$e_3\colon 3^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ を，例題 5.3.8 で定義した，3 進小数展開が定める写像とする．$c_3\colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ を，問題 6.5.4 のように，$c_3((a_n)) = 2e_3((a_n)) = e_3((2a_n))$ で定める．問題 3.1.1.3. より，c_3 は単射だから，$\mathrm{Card}\ 2^{\mathbb{N}} \leq \mathrm{Card}\ \mathbb{R}$ である．

写像 $L\colon \mathbb{R} \to P(\mathbb{Q})$ を，$r \in \mathbb{R}$ に対し $L(r) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$ を対応させることで定める．L は単射だから，$\mathrm{Card}\ \mathbb{R} \leq \mathrm{Card}\ P(\mathbb{Q}) = \mathrm{Card}\ 2^{\mathbb{N}}$ である．　■

よりみち 95　実数をデデキントの切断で定義すれば，系 7.2.4 の証明中の単射 $L\colon \mathbb{R} \to P(\mathbb{Q})$ は，包含写像である．

定義 7.2.5　$\mathrm{Card}\ X = \mathrm{Card}\ \mathbb{R}$ であるとき，X の濃度は**連続濃度** (cardinality of continuum) であるといい，$\mathrm{Card}\ X = \aleph$ と表わす．　□

X, Y, Z を集合とすると，問題 2. 4.4.3. の標準全単射 $(X^Y)^Z \to X^{Y \times Z}, X^{Y \amalg Z} \to X^Y \times X^Z, (X \times Y)^Z \to X^Z \times Y^Z$ より，$\mathrm{Card}\ (X^Y)^Z = \mathrm{Card}\ X^{Y \times Z}$, $\mathrm{Card}\ X^{Y \amalg Z} = \mathrm{Card}\ (X^Y \times X^Z)$, $\mathrm{Card}\ (X \times Y)^Z = \mathrm{Card}\ (X^Z \times Y^Z)$ である．

命題 7.2.6　$n \geq 1$ ならば，$\mathrm{Card}\ \mathbb{R}^n = \mathrm{Card}\ \mathbb{R}$ である．　□

証明　$\mathrm{Card}\ \mathbb{R}^n = \mathrm{Card}\ (2^{\mathbb{N}})^n = \mathrm{Card}\ 2^{\mathbb{N} \times n} = \mathrm{Card}\ 2^{\mathbb{N}} = \mathrm{Card}\ \mathbb{R}$ である．　■

よりみち 96　不等式 $\mathrm{Card}\ \mathbb{N} < \mathrm{Card}\ \mathbb{R}$ により，無限集合にもいろいろな大きさのものがあることがわかる．一方，等式 $\mathrm{Card}\ \mathbb{R}^2 = \mathrm{Card}\ \mathbb{R}$ により，次

元などの幾何的な概念をとらえるには，n 次元空間を単に集合として考えるだけでは，不十分であることもわかる．このことは，位相空間論の展開への契機の 1 つとなった．

まとめ
・双方向に単射があれば，全単射が構成できる．
・巾集合の濃度は，もとの集合の濃度より，真に大きい．
・$\mathbb{R}$ の濃度は，$\mathbb{N}$ の巾集合の濃度と等しい．

問題

A 7.2.1 $X = Y = \mathbb{N}$ とし，単射 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(n) = 2n$, $g(n) = n + 1$ で定める．このとき，命題 7.2.2 の証明中の X', X'', X_∞ を求め，全単射 $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を具体的に表わせ．

A 7.2.2 Card $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ = Card $\mathbb{R}$ を示せ．

B 7.2.3 1. Card $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ = Card $2^{\mathbb{R}}$ > Card $\mathbb{R}$ を示せ．
2. $C(\mathbb{R})$ を連続関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 全体の集合とする．Card $C(\mathbb{R})$ = Card $\mathbb{R}$ を示せ．

B 7.2.4 次の無限集合がそれぞれ可算かどうか判定し，その理由を与えよ．

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \{$ 有理数列 $(a_n)\}$, $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid a_n \neq 0$ となる n は有限個 $\}$.

B 7.2.5 全単射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ を 1 つ与えよ．

7.3 ツォルンの補題と無限集合 *

この節では，選択公理や，それと同値なツォルンの補題とよばれる命題を使って，集合の濃度や無限集合の性質を調べる．

命題 7.3.1 AC $X \to Y$ が全射ならば，Card $Y \leq$ Card X である． □

証明 $X \to Y$ が全射ならば，命題 2.7.5.2.(1)⇒(2)AC より，単射 $Y \to X$ が存在する．よって，Card $Y \leq$ Card X である． ■

ツォルンの補題の定式化の準備として，用語を定義する．

定義 7.3.2 X を集合とする．

1. T を巾集合 $P(X)$ の部分集合とする．任意の $A, B \in T$ に対し $A \subset B$ か $B \subset A$ のどちらかがなりたつとき，T は包含関係に関し**全順序集合** (totally ordered set) であるという．

X の部分集合 C が，任意の $A \in T$ に対し $A \subset C$ をみたすとき，C は T の**上界**であるという．

2. S を巾集合 $P(X)$ の部分集合とし，$A \subset X$ を S の元とする．$A \subsetneqq B$ をみたす元 $B \in S$ が存在しないとき，A は S の**極大元** (maximal element) であるという．

3. S を巾集合 $P(X)$ の部分集合とする．S の任意の空でない全順序部分集合 T に対し，S の元で T の上界であるものが存在するとき，S は包含関係に関して**帰納的順序集合** (inductively ordered set) であるという． □

定理 7.3.3 (**ツォルンの補題** (Zorn's lemma))$^{\mathrm{AC}}$ X を集合とし，S を巾集合 $P(X)$ の部分集合で，包含関係に関して帰納的順序集合であるものとする．A を S の元とすると，S の極大元で A を部分集合として含むものが存在する． □

証明 X を集合とし，巾集合の部分集合 $S \subset P(X)$ が包含関係に関して帰納的順序集合であるとする．$A \in S$ とし，

$$\mathcal{T} = \{T \in P(S) \mid A \in T \text{ であり，} T \text{ は包含関係に関して全順序集合である }\}$$

とおく．$T \in \mathcal{T}$ に対し，$\mathcal{C}_T = \{C \in S \mid C \text{ は } T \text{ の上界であり，} C \notin T\}$ とおく．$\mathcal{C}_T = \emptyset$ となる $T \in \mathcal{T}$ が存在すると仮定して，S の極大元で，A を部分集合として含むものの存在を示す．S は帰納的順序集合だから，T の上界 $C \in S$ が存在する．$A \in T$ だから $A \subset C$ である．C が S の極大元であることを示す．$B \in S$ が $C \subsetneqq B$ をみたすとする．このとき，B も T の上界だから，仮定 $\mathcal{C}_T = \emptyset$ より $B \in T$ である．C は T の上界だから，$B \subset C$ である．これは矛盾だから，C は S の極大元である．

$\mathcal{C}_T = \emptyset$ となる $T \in \mathcal{T}$ が存在しないと仮定して，矛盾を導けばよい．このとき，選択公理より $(C_T) \in \prod_{T\in\mathcal{T}} \mathcal{C}_T$ が存在する．写像 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ を，$F(T) = T \amalg \{C_T\}$ で定める．巾集合 $P(\mathcal{T})$ の部分集合 $\mathcal{A}$ を，

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathcal{R} \in P(\mathcal{T}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{(i) } \{A\} \in \mathcal{R}, \\ \text{(ii) } T \in \mathcal{R} \text{ ならば } F(T) \in \mathcal{R}, \\ \text{(iii) } \mathcal{Q} \subset \mathcal{R} \text{ が包含関係に関し全順序集合ならば} \\ \qquad \bigcup_{T\in\mathcal{Q}} T \in \mathcal{R} \end{array} \right\}$$

で定める．$\mathcal{Q} \subset \mathcal{T} \subset P(S)$ が包含関係に関し全順序集合ならば，$\bigcup_{T\in\mathcal{Q}} T \subset S$ も全順序部分集合であり，$\bigcup_{T\in\mathcal{Q}} T \in \mathcal{T}$ である．よって $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$ である．$\mathcal{R}_0 = \bigcap_{\mathcal{R}\in\mathcal{A}} \mathcal{R}$ とおく．$\mathcal{R}_0 \in \mathcal{A}$ である．

$\mathcal{R}_0$ が包含関係に関して全順序集合であることを示す．$T \in \mathcal{R}_0$ に対し $\mathcal{R}_T = \{U \in \mathcal{R}_0 \mid U \subset T \text{ または } T \subset U\}$ とおき，$\mathcal{R}_1 = \{T \in \mathcal{R}_0 \mid \mathcal{R}_T = \mathcal{R}_0\}$ とおく．$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0$ を示せばよい．そのために，$\mathcal{R}_1 \in \mathcal{A}$ を示す．$\mathcal{R}_1$ が $\mathcal{A}$ の定義の条件 (i) と (iii) をみたすことは簡単にわかる．(ii) をみたすことを，次の補題で示す．

補題 7.3.4　$T \in \mathcal{R}_0$ とする．$\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_0$ ならば $\mathcal{R}_{F(T)} = \mathcal{R}_0$ である．　□

証明　$\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_0$ であるとして，$\mathcal{R}_{F(T)} \in \mathcal{A}$ を示す．$\mathcal{R}_{F(T)}$ が $\mathcal{A}$ の定義の条件 (i) と (iii) をみたすことは簡単にわかるから，(ii) をみたすことを示す．$U \in \mathcal{R}_{F(T)}$ と仮定して，$F(U) \in \mathcal{R}_{F(T)}$ を示す．$U \in \mathcal{R}_{F(T)}$ より，$U \subset F(T)$ か $F(T) \subset U$ のどちらかがなりたつ．また，$F(U) \in \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_T$ だから，$F(U) \subset T$ か $T \subset F(U)$ のどちらかもなりたつ．したがって，

$$F(T) \subset U, \quad F(U) \subset T, \quad U \subset F(T) \text{ かつ } T \subset F(U)$$

の 3 条件のどれかがなりたつ．$F(T) \subset U$ ならば，$F(T) \subset U \subset F(U)$ だから，$F(U) \in \mathcal{R}_{F(T)}$ である．$F(U) \subset T$ のときも，$F(U) \subset T \subset F(T)$ だから，$F(U) \in \mathcal{R}_{F(T)}$ である．$U \subset F(T)$ かつ $T \subset F(U)$ であるとする．このとき，$U \subset U \cup T \subset F(U)$ かつ $T \subset U \cup T \subset F(T)$ だから，

$$U = U \cup T = T, \quad F(U) = U \cup T = F(T),$$
$$U = U \cup T = F(T), \quad T = U \cup T = F(U)$$

の 4 条件のどれかがなりたつ．はじめの 2 つの場合は，$F(U) = F(T)$ である．残りの 2 つの場合も，$F(T) = U \subset F(U)$ か $F(U) = T \subset F(T)$ のどちらかがなりたつ．いずれにしても $F(U) \in \mathcal{R}_{F(T)}$ であり，条件 (ii) もみたされる．よって，$\mathcal{R}_{F(T)} \in \mathcal{A}$ である．

$\mathcal{R}_{F(T)} \in \mathcal{A}$ より，$\mathcal{R}_0 = \bigcap_{\mathcal{R} \in \mathcal{A}} \mathcal{R} \subset \mathcal{R}_{F(T)}$ だから，$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{F(T)}$ である．

■

補題 7.3.4 より，$\mathcal{R}_1 \in \mathcal{A}$ が示された．よって，補題 7.3.4 の証明の終わりの部分と同様に，$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0$ であり，$\mathcal{R}_0$ は包含関係に関し全順序集合である．

$\mathcal{A}$ の定義の条件 (iii) より，$T_0 = \bigcup_{T \in \mathcal{R}_0} T$ は $\mathcal{R}_0$ の元である．条件 (ii) より，$F(T_0) \in \mathcal{R}_0$ であり，$F(T_0) \subset \bigcup_{T \in \mathcal{R}_0} T = T_0 \subsetneqq F(T_0)$ となって矛盾が得られた． ■

ツォルンの補題（定理 7.3.3）の証明には，選択公理を使った．逆に選択公理は，ツォルンの補題から導けるので，これらはたがいに同値な命題である（問題 7.3.2）．

ツォルンの補題を使って，任意の集合の濃度は比較できることを示す．

命題 7.3.5 AC　X, Y を集合とする．単射 $f\colon X \to Y$ が存在するかまたは単射 $g\colon Y \to X$ が存在する． □

証明　$P(X \times Y)$ の部分集合 S を，

$$S = \bigcup_{(A,B) \in P(X) \times P(Y)} \{\Gamma \in P(A \times B) \mid \Gamma \text{ は全単射 } A \to B \text{ のグラフである}\}$$

で定める．$\Gamma \in S$ に対し，$A_\Gamma = \mathrm{pr}_1(\Gamma) \subset X$，$B_\Gamma = \mathrm{pr}_2(\Gamma) \subset Y$ とおき，Γ は全単射 $g_\Gamma\colon A_\Gamma \to B_\Gamma$ のグラフであるとする．

S が包含関係に関して帰納的順序集合であることを示す．T を S の空でない部分集合で，包含関係に関し全順序集合であるものとする．$\Gamma_T = \bigcup_{\Gamma \in T} \Gamma$，$A_T = \bigcup_{\Gamma \in T} A_\Gamma$，$B_T = \bigcup_{\Gamma \in T} B_\Gamma$ とおく．$\mathrm{pr}_1|_{\Gamma_T}\colon \Gamma_T \to A_T$，$\mathrm{pr}_2|_{\Gamma_T}\colon \Gamma_T \to B_T$ は全単射だから，Γ_T は全単射 $\mathrm{pr}_2|_{\Gamma_T} \circ (\mathrm{pr}_1|_{\Gamma_T})^{-1}\colon A_T \to B_T$ のグラフである．よって，$\Gamma_T \in S$ である．任意の元 $\Gamma \in T$ に対し，$\Gamma \subset \Gamma_T$ だから，Γ_T は T の上界である．$\emptyset \subset X \times Y$ は，$\emptyset$ の恒等写像のグラフであり，$\emptyset \subset X$, $\emptyset \subset Y$

だから，$\emptyset \in S$ である．よって，ツォルンの補題より，S の極大元 Γ が存在する．

$A_\Gamma = X$ かまたは $B_\Gamma = Y$ であることを示す．$A_\Gamma \subsetneqq X$ かつ $B_\Gamma \subsetneqq Y$ だったとする．$a \in X \setminus A_\Gamma$, $b \in Y \setminus B_\Gamma$ とすると，$\Gamma' = \Gamma \amalg \{(a,b)\}$ は，全単射 $A_\Gamma \cup \{a\} \to B_\Gamma \cup \{b\}$ のグラフである．よって $\Gamma' \in S$ である．$\Gamma' \supsetneqq \Gamma$ だから，これは Γ の極大性に矛盾する．よって，$A_\Gamma = X$ かまたは $B_\Gamma = Y$ である．

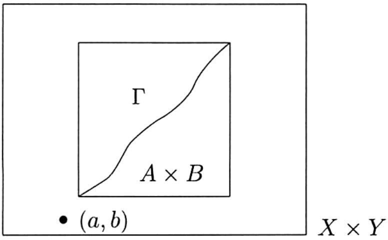


図 **7.2** $\Gamma \subset A \times B \subset X \times Y$

$A_\Gamma = X$ とすると，$g_\Gamma \colon X = A_\Gamma \to B_\Gamma \subset Y$ は単射である．$B_\Gamma = Y$ なら，$g_\Gamma^{-1} \colon Y = B_\Gamma \to A_\Gamma \subset X$ は単射である． ■

ツォルンの補題を使って，無限集合を特徴づける．

命題 7.3.6 X を集合とする．次の条件 (1)–(4) はすべて同値である．

(1) X は無限集合である．

(2) 単射 $\mathbb{N} \to X$ が存在する．

(3) 単射 $X \amalg \mathbb{N} \to X$ が存在する．

(4) 全射ではない単射 $X \to X$ が存在する． □

証明 (1)⇒(2)$^{\mathrm{AC}}$: X を無限集合とする．命題 7.3.5 より，単射 $\mathbb{N} \to X$ がないとすると，単射 $f \colon X \to \mathbb{N}$ が存在する．$A = f(X)$ も無限集合だから，命題 7.1.5 より，$C_A \colon A \to \mathbb{N}$ は全単射である．よって，合成 $C_A \circ f \colon X \to \mathbb{N}$ は全単射である．

(2)⇒(3): $f \colon \mathbb{N} \to X$ を単射とする．写像 $g \colon X \amalg \mathbb{N} \to X$ を，

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in X \setminus f(\mathbb{N}) \text{ のとき}, \\ f(2n) & x = f(n) \in f(\mathbb{N}) \text{ のとき}, \\ f(2n+1) & x = n \in \mathbb{N} \text{ のとき} \end{cases}$$

で定めると，g は単射である．

(3)⇒(4): $f\colon X \amalg \mathbb{N} \to X$ を単射とすると，f の X への制限 $f|_X\colon X \to X$ は単射だが，全射でない．

(4)⇒(1): 系 7.1.7.1. より，X が有限集合なら任意の単射 $X \to X$ は全射である．対偶をとれば，(4)⇒(1) である．■

定理 7.3.7　X を集合とする．次の条件 (1)–(3) はすべて同値である．

(1) X は無限集合である．

(2) $X \neq \emptyset$ であり，単射 $X \times \mathbb{N} \to X$ が存在する．

(3) Card $X \neq 0, 1$ であり，単射 $X \times X \to X$ が存在する．□

証明　(1)⇒(2)$^{\mathrm{AC}}$: 巾集合 $P((X \times \mathbb{N}) \times X)$ の部分集合 S を，

$$S = \bigcup_{A \in P(X)} \{\Gamma \in P((A \times \mathbb{N}) \times A) \mid \Gamma \text{ は単射 } A \times \mathbb{N} \to A \text{ のグラフである}\}$$

で定める．S は $P((X \times \mathbb{N}) \times X)$ の帰納的部分集合である．$\emptyset \in S$ だから，ツォルンの補題より，S の極大元 Γ と X の部分集合 B で，Γ が単射 $g\colon B \times \mathbb{N} \to B$ のグラフであるものが存在する．

$B' = X \setminus B$ が有限集合であることを示す．B' が有限集合でなかったとすると，命題 7.3.6(1)⇒(2) より，可算無限部分集合 $A \subset B'$ が存在する．系 7.1.9.1. より $\mathbb{N}^2$ は可算無限集合だから，全単射 $A \times \mathbb{N} \to A$ が存在する．したがって，$C = B \cup A$ とおくと，単射 $C \times \mathbb{N} \to C$ で，g の延長であるものが存在する．$B \subsetneqq C$ だから，これは Γ の極大性に矛盾する．よって，$B' = X \setminus B$ は有限集合である．

X は無限集合で $B' = X \setminus B$ は有限集合だから，B は無限集合である．命題 7.3.6(1)⇒(3) より，単射 $B \amalg \mathbb{N} \to B$ があるから，単射 $i\colon X = B \cup B' \to B$ がある．$g \circ (i \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}})\colon X \times \mathbb{N} \to B \subset X$ も単射である．

(1)⇒(3)$^{\mathrm{AC}}$: 巾集合 $P((X \times X) \times X)$ の部分集合 S を，

$$S = \bigcup_{A \in P(X)} \{\Gamma \in P((A \times A) \times A) \mid \Gamma \text{ は単射 } A \times A \to A \text{ のグラフである }\}$$

で定める．S は $P((X \times X) \times X)$ の帰納的部分集合である．命題 7.3.6 (1)⇒(2) より，X の可算無限部分集合 A が存在する．系 7.1.9.1. より $\mathbb{N}^2$ は可算無限集合だから，全単射 $A \times A \to A$ が存在する．よって，ツォルンの補題より，S の極大元 Γ と X の部分集合 B で，Γ は単射 $g\colon B \times B \to B$ のグラフであり $A \subset B$ であるものが存在する．

単射 $B \to X \setminus B$ は存在しないことを示す．単射 $h\colon B \to X \setminus B$ があったとし，$B' = h(B)$, $C = B \cup B'$ とおく．B は無限集合だから，(1)⇒(2) より，単射 $C \to B \times \{0,1\} \to B$ が存在する．$g\colon B \times B \to B$ は単射だから，単射 $C \times C \to B'$ が存在する．よって，単射 $C \times C = (B \times B) \cup (C \times C \setminus B \times B) \to C = B \cup B'$ で，$g\colon B \times B \to B$ の延長であるものが存在する．$B \subsetneqq C$ だから，これは Γ の極大性に矛盾する．よって，単射 $B \to X \setminus B$ は存在しない．

よって，命題 7.3.5 より，単射 $X \setminus B \to B$ が存在する．(1)⇒(2) より，単射 $X = B \cup (X \setminus B) \to B \times \{0,1\} \to B$ が存在し，単射 $X \times X \to B \times B \to B \subset X$ が存在する．

(2)⇒(1): $a \in X$ とする．写像 $f\colon \mathbb{N} \to X \times \mathbb{N}$ を $f(n) = (a, n)$ で定めると，f は単射である．単射 $X \times \mathbb{N} \to X$ との合成 $\mathbb{N} \to X$ も，単射だから，命題 7.3.6(2)⇒(1) より，X は無限集合である．

(3)⇒(1): 対角写像 $\delta\colon X \to X \times X$ は単射であり，Card $X \neq 0, 1$ なら全射でない．単射 $X \times X \to X$ との合成 $X \to X$ も，全射でない単射である．よって，命題 7.3.6(4)⇒(1) より，X は無限集合である． ■

系 7.3.8 AC　1. X を無限集合とする．$F(X)$ を，巾集合 $P(X)$ の部分集合 $F(X) = \{A \in P(X) \mid A \text{ は有限集合 }\}$ とすると，単射 $F(X) \to X$ が存在する．

2. $f\colon X \to Y$ を全射とし，任意の $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y)$ は可算であるとする．Y が無限集合ならば，単射 $X \to Y$ が存在する． □

証明　1. 写像 $X^n \to F(X)$ を $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \{x_1, \ldots, x_n\}$ で定めると，その無縁和 $\coprod_{n \in \mathbb{N}} X^n \to F(X)$ は全射である．よって，命題 7.3.1 より，単射 $F(X) \to \coprod_{n \in \mathbb{N}} X^n$ が存在する．定理 7.3.7(1)⇒(3) と n に関する帰納法よ

り，単射 $X^n \to X$ が存在する．よって，さらに定理 7.3.7(1)⇒(2) より，単射 $\coprod_{n\in\mathbb{N}} X^n \to X \times \mathbb{N} \to X$ が存在する．

2. 選択公理より，単射 $g_y\colon f^{-1}(y) \to \mathbb{N}$ の族 $(g_y)_{y\in Y}$ が存在する．(g_y) の無縁和 $g\colon X \to Y \times \mathbb{N}$ も単射である．Y が無限集合ならば，定理 7.3.7(1)⇒(2) より，単射 $Y \times \mathbb{N} \to Y$ が存在する．よって，単射 $X \to Y$ が存在する．■

ツォルンの補題を使って，任意の線形空間に基底が存在することを証明することもできる．その証明は，この本では省略する．

まとめ
- ツォルンの補題を，定式化し証明した．
- ツォルンの補題から，任意の集合の濃度が比較できることがしたがう．
- ツォルンの補題を使って，無限集合の性質を調べた．

問題

A 7.3.1　X を無限集合とする．単射 $f\colon Y \to X$ が存在するならば，単射 $X \amalg Y \to X$, $X \times Y \to X$ も存在することを示せ．

BP 7.3.2　ツォルンの補題から，選択公理を導け．

第8章 距離空間と可算性

この章では，おもに距離空間についてさらにくわしく調べる．

はじめに 8.1 節では，一般の位相空間への写像の極限を定義する．その応用として，ツォルンの補題を使って，チコノフの定理を証明する．点列の収束は，ここで定義する極限の特別な場合である．この節の内容は，チコノフの定理を定理 8.3.5 の証明で使う以外は，あとで使わない．

距離空間を調べるには，点列の収束が役にたつ．8.2 節では，まず点列の収束を定義する．コンパクト距離空間の点列は，収束するとは限らないが，それに近い性質がなりたつことを示す．実数列の収束については，コーシーの判定法とよばれる必要十分条件がある．8.3 節では，距離空間の点列の収束に関して，コーシーの判定法の一般化として，完備性を定義する．$\mathbb{R}^n$ は完備である．距離空間がコンパクトなら完備であることも示し，距離空間がコンパクトであるための必要十分条件を証明する．

8.4 節では，開集合系の基底や開近傍の基本系について可算性の条件を定義する．位相空間の位相を定義する距離が存在するための条件も調べる．この節の内容は，この章のほかの節の内容と独立である．

8.5 節では，完備距離空間の縮小写像には不動点があることの応用として，陰関数定理と常微分方程式の解の存在定理を証明する．8.5 節の内容は，第 7 章や 8.4 節の内容と独立であり，こちらを先に読むこともできる．

8.1 極限 *

部分空間で定義された写像の極限を，定義する．

定義 8.1.1　X を位相空間とし，A を X の部分集合とする．

1. $x \in X$ が部分空間 $A \cup \{x\}$ の孤立点でないとき，x は A の**集積点** (accumulation point) であるという.

2. Y も位相空間とし，$a \in X \setminus A$ を A の集積点とする．$f\colon A \to Y$ を写像とし，$b \in Y$ とする．$\widetilde{A} = A \amalg \{a\}$ を X の部分空間とし，写像 $\tilde{f}\colon \widetilde{A} \to Y$ を $\tilde{f}(a) = b, \tilde{f}|_A = f$ で定めると，$\tilde{f}$ は a で連続であるとする．このとき，$x \in A$ が a に限りなく近づくとき $f(x)$ は b に**収束**するといい，b を $x \in A$ が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の**極限**とよぶ. □

$x \in X \setminus A$ とすると，x が A の集積点であるとは，$x \in \overline{A} \setminus A$ ということである．上の極限の定義は，$U = \widetilde{A}$ が $X = \mathbb{R}^n$ の開集合で $Y = \mathbb{R}^m$ の場合の，定義 3.3.1.1. の一般化である．ハウスドルフ空間への写像については，極限の一意性がなりたつ.

命題 8.1.2　X と Y を位相空間とし，A を部分集合，$a \in X \setminus A$ を A の集積点とする.

1. 写像 $f\colon A \to Y$ と $b \in Y$ に対し，次の条件 (1) と (2) は同値である.

(1) $x \in A$ が a に近づくとき，$f(x)$ は b に収束する.

(2) b の任意の開近傍 V に対し，$a \in X$ の開近傍 U で，$f(U \cap A) \subset V$ をみたすものが存在する.

2. Y をハウスドルフ空間とし，$f\colon A \to Y$ を写像とする．$x \in A$ が a に限りなく近づくとき $f(x)$ が $b, c \in Y$ の両方に収束するならば，$b = c$ である. □

証明　1. f の延長 $\tilde{f}\colon \widetilde{A} = A \cup \{a\} \to Y$ を $f(a) = b$ で定める．(1) は，b の任意の開近傍 V に対し，$\tilde{f}(W) \subset V$ をみたす $a \in \widetilde{A}$ の開近傍 W が存在するということである．これは，(2) と同値である.

2. 背理法で示す．f が $b \neq c$ の両方に収束すると仮定する．b の開近傍 V と c の開近傍 W で，$V \cap W = \emptyset$ をみたすものが存在する．1. より，$a \in X$ の開近傍 U で，$f(U \cap A) \subset V$ と $f(U \cap A) \subset W$ をみたすものが存在する．$f(U \cap A) \subset V \cap W = \emptyset$ だから $U \cap A = \emptyset$ であり，a が A の集積点という仮定に矛盾する. ■

ハウスドルフ空間 Y では，命題 8.1.2.2. より，極限は存在すれば一意的に定まるので，$b \in Y$ が $x \in A$ が $a \in X \setminus A$ に限りなく近づくときの $f(x)$ の極限であるとき，$b = \lim_{x \to a} f(x)$ で表わす．

チコノフの定理（定理 6.4.8）を証明するための準備をする．集合 A に対し，$\widetilde{A} = A \amalg \{\infty\}$ で直和を表わし，

$$S_A = \left\{ \mathcal{O} \in P(P(\widetilde{A})) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{O} \text{ は } \widetilde{A} \text{ の位相であり，} \\ \infty \text{ は } A \text{ の集積点である} \end{array} \right\} \tag{8.1}$$

とおく．∞ が A の集積点であるとは，A が $\widetilde{A}$ で稠密ということである．

補題 8.1.3 A を集合とし，$\widetilde{A} = A \amalg \{\infty\}$ とおく．S_A を式 (8.1) で定めると，S_A は包含関係に関して帰納的順序集合である． □

証明 $T \subset S_A$ を空でない部分集合で，包含関係に関して全順序集合であるものとする．$\mathcal{O}_T$ を合併 $\bigcup_{\mathcal{O} \in T} \mathcal{O}$ によって生成される $\widetilde{A}$ の位相とする．$\mathcal{O} \in T$ なら $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_T$ だから，$\mathcal{O}_T$ が S_A の元であることを示せばよい．$\infty \in U \in \mathcal{O}_T$ とすると，$\infty \in \bigcap_{i \in I} V_i \subset U$ をみたす $\bigcup_{\mathcal{O} \in T} \mathcal{O}$ の元の有限族 $(V_i)_{i \in I}$ がある．T は空でない全順序集合だから，T の元 $\mathcal{O}$ で，任意の $i \in I$ に対し $V_i \in \mathcal{O}$ をみたすものがある．$\bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{O}$ だから，$U \cap A \neq \emptyset$ である．よって，∞ は $\mathcal{O}_T$ に関して A の集積点である． ■

S_A を使って，位相空間のコンパクト性を判定できる．

命題 8.1.4 位相空間 X について，次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) X はコンパクト空間である．

(2) A を任意の集合とし，$\mathcal{O}$ を S_A の任意の元とする．$\widetilde{A}$ を $\mathcal{O}$ によって位相空間と考え，A をその部分空間と考える．任意の連続写像 $f\colon A \to X$ に対し，f のグラフ $\Gamma_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ の積位相に関する閉包 $\overline{\Gamma_f} \subset \widetilde{A} \times X$ と $\{\infty\} \times X$ の共通部分は空でない．

(3) A を任意の集合とし，$\mathcal{O}$ を S_A の任意の極大元とする．$\widetilde{A}$ を $\mathcal{O}$ によって位相空間と考える．任意の写像 $f\colon A \to X$ に対し，f の延長である連続写像 $g\colon \widetilde{A} \to X$ が存在する． □

命題 8.1.4 の条件 (3) は，$a \in A$ が ∞ に限りなく近づくときの $f(a)$ の極限が存在するということである（問題 8.1.3）．

証明　(1)⇒(2):　命題 6.4.4 より，射影 $\mathrm{pr}_1\colon \widetilde{A} \times X \to \widetilde{A}$ は閉写像であり，$\mathrm{pr}_1(\overline{\Gamma_f})$ は $\widetilde{A}$ の閉集合である．$A \subset \mathrm{pr}_1(\overline{\Gamma_f})$ であり A は稠密だから，$\mathrm{pr}_1(\overline{\Gamma_f}) = \widetilde{A}$ である．よって，$\overline{\Gamma_f} \cap (\{\infty\} \times X) \neq \emptyset$ である．

(2)⇒(3):　$(\infty, x) \in \overline{\Gamma_f}$ とし，$\widetilde{\Gamma} = \Gamma \cup \{(\infty, x)\}$ とおく．第 1 射影の制限 $p\colon \widetilde{\Gamma} \to \widetilde{A}$ は連続全単射である．Γ は $\widetilde{\Gamma}$ で稠密だから，$\mathcal{O}$ の極大性より，$p\colon \widetilde{\Gamma} \to \widetilde{A}$ は同相写像である．よって，$g = \mathrm{pr}_2|_{\widetilde{\Gamma}} \circ p^{-1}\colon \widetilde{A} \to \widetilde{\Gamma} \to X$ とおくと，g は連続であり，f の延長である．

(3)⇒(1)$^{\mathrm{AC}}$:　Y を任意の位相空間とする．命題 6.4.4 より，第 2 射影 $\mathrm{pr}_2\colon X \times Y \to Y$ が閉写像であることを示せばよい．任意の閉集合 $A \subset X \times Y$ と任意の点 $y \in \overline{\mathrm{pr}_2(A)}$ に対し，$y \in \mathrm{pr}_2(A)$ を示せばよい．

$\mathrm{pr}_2|_A\colon A \to Y$ の延長 $h\colon \widetilde{A} \to Y$ を $h(\infty) = y$ で定め，$\widetilde{A}$ の位相 $\mathcal{O}$ を h による Y の位相のひきもどしとする．$y \in \overline{\mathrm{pr}_2(A)}$ だから ∞ は $\mathcal{O}$ に関して A の集積点であり，$\mathcal{O} \in S_A$ である．補題 8.1.3 より，ツォルンの補題を S_A に適用でき，$\mathcal{O}$ を部分集合として含む S_A の極大元 $\widetilde{\mathcal{O}}$ が存在する．h は $\mathcal{O}$ に関して連続だから，$\widetilde{\mathcal{O}}$ に関しても連続である．

以下，$\widetilde{A}$ を $\widetilde{\mathcal{O}}$ により位相空間と考える．(3) より，$\mathrm{pr}_1|_A\colon A \to X$ を延長する連続写像 $g\colon \widetilde{A} \to X$ が存在する．g と h がひきおこす連続写像 $f\colon \widetilde{A} \to X \times Y$ は包含写像 $i\colon A \to X \times Y$ の延長である．$A \subset \widetilde{A}$ は稠密だから，$f(\infty) = (g(\infty), y) \in f(\widetilde{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{A} = A$ である．よって，$y \in \mathrm{pr}_2(A)$ である．■

チコノフの定理を証明する．チコノフの定理の証明には，選択公理とツォルンの補題を使うが，選択公理をチコノフの定理から導くこともできるので，この 3 つはすべて同値な命題である（問題 8.1.4）．

定理 6.4.8 の証明　$(X_i)_{i \in I}$ をコンパクト空間の族とし，$X = \prod_{i \in I} X_i$ を積空間とする．A を任意の集合とし，$\mathcal{O}$ を S_A の任意の極大元とする．$\widetilde{A} = A \amalg \{\infty\}$ を $\mathcal{O}$ によって位相空間と考える．$f\colon A \to X$ を任意の写像とする．命題 8.1.4(1)⇒(3) より，$i \in I$ に対し，合成写像 $\mathrm{pr}_i \circ f\colon A \to X_i$ を延長する連続

写像 $g_i\colon \widetilde{A} \to X_i$ が存在する．選択公理より連続写像 $g_i\colon \widetilde{A} \to X_i$ の族 $(g_i)_{i\in I}$ が存在し，積空間の普遍性より連続写像 $g\colon \widetilde{A} \to X$ が定まる．g の A への制限は f と等しいから，命題 8.1.4 (3)⇒(1)$^{\mathrm{AC}}$ より，X はコンパクトである．■

よりみち 97　S_A の極大元は，A の**超フィルター** (ultra filter) を定める．超フィルターの極限が存在する空間としてコンパクト空間を特徴づけることで，チコノフの定理を証明している．

まとめ
・部分空間で定義された位相空間への写像の極限を，集積点での写像の連続性により定義した．
・極限を使って，チコノフの定理を証明した．

問題

A 8.1.1　$n > 0$ を自然数とし，U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．U の点 a は，U の集積点であることを示せ．

A 8.1.2　Y を位相空間とし，$a, b \in Y$ を相異なる点とする．$A = Y \setminus \{a, b\}$ とし，$\mathcal{O}_A$ を A の部分空間としての位相とする．a の任意の開近傍 U と b の任意の開近傍 V に対し $U \cap V \cap A \neq \emptyset$ であるとし，$X = A \amalg \{c\}$ の位相 $\mathcal{O}_X$ を，$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_A \cup \{(U \cap V \cap A) \cup \{c\} \mid U$ は a の開近傍，V は b の開近傍 $\}$ で定める．

c は A の集積点であり，$f\colon A \to Y$ を包含写像とすると，$x \in A$ が c に近づくとき $f(x)$ は a と b の両方に収束することを示せ．

A 8.1.3　A を集合とし，S_A を式 (8.1) で定める．$\mathcal{O}$ が包含関係に関して S_A の極大元ならば，$P(A) \subset \mathcal{O}$ であることを示せ．

BP 8.1.4　チコノフの定理から，選択公理を導け．

8.2　点列の収束

位相空間の点列の収束を定義する．

定義 8.2.1　1. X を位相空間とし，(x_n) を X の点列，$a \in X$ とする．a の任意の開近傍 U に対し，$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin U\}$ は有限集合であるとき，点列 (x_n) は a に**収束**するという．

2.　X を距離空間とし，(x_n) を X の点列とする．$a \in X$ とする．$\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$ であるとき，点列 (x_n) は a に収束するという．

X の部分集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が有界であるとき，点列 (x_n) は**有界**であるという．　□

距離空間の点列の収束の定義 8.2.1.2. は，$X = \mathbb{R}^n$ の場合の定義 3.2.6 の一般化である．また，定義 8.2.1.2. は，一般の位相空間の点列の収束の定義 8.2.1.1. の特別の場合であることを，次の命題 8.2.2 で示す．さらに，離散空間 $\mathbb{N}$ の 1 点コンパクト化 $\widetilde{\mathbb{N}}$ の無限遠点 ∞ を考えれば，定義 8.2.1.1. は，一般の極限の定義 8.1.1.2. の特別の場合であることも示す．

$\mathbb{N}$ を離散空間とし，$\widetilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \amalg \{\infty\}$ で，その 1 点コンパクト化を表わす．補題 6.6.4 の 1 点コンパクト化の位相の記述より，$U \subset \widetilde{\mathbb{N}}$ が開集合であるための条件は，$\infty \notin U$ かまたは補集合 $\widetilde{\mathbb{N}} \setminus U$ が有限集合であることである．$\widetilde{\mathbb{N}}$ は，この本だけの記号である．

命題 8.2.2　X を位相空間とし，(x_n) を X の点列，a を X の点とする．

1. $\widetilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \amalg \{\infty\}$ を離散空間 $\mathbb{N}$ の 1 点コンパクト化とする．写像 $\tilde{x} \colon \widetilde{\mathbb{N}} \to X$ を，

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} x_n & n \in \mathbb{N} \text{ のとき}, \\ a & n = \infty \text{ のとき} \end{cases} \tag{8.2}$$

で定める．次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) 点列 (x_n) は a に収束する．

(2) 写像 $\tilde{x} \colon \widetilde{\mathbb{N}} \to X$ は連続である．

2. X が距離空間ならば，上の条件 (1) と (2) は，次の条件 (3) とも同値である．

(3) $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$ である．

3. X が距離空間であるとする．(x_n) が収束するならば，(x_n) は有界である．　□

証明 1. $n \in \mathbb{N} \subset \widetilde{\mathbb{N}}$ は孤立点だから，(2) は写像 $\tilde{x}$ が ∞ で連続ということである．X の部分集合 $U \ni a$ に対し，$\tilde{x}^{-1}(U)$ が ∞ の開近傍を含むとは，$\widetilde{\mathbb{N}} \setminus \tilde{x}^{-1}(U) = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin U\}$ が有限集合ということである．よって，(1) と (2) は同値である．

2. 条件 (1) と (3) が同値であることを示せばよい．これは，命題 3.2.7 (3)⇔(1) と同様である．

3. (x_n) が $a \in X$ に収束するとし，写像 $\tilde{x}\colon \widetilde{\mathbb{N}} \to X$ を式 (8.2) で定める．$\widetilde{\mathbb{N}}$ はコンパクトで，$\tilde{x}$ は連続だから，系 6.4.3 より，像 $\tilde{x}(\widetilde{\mathbb{N}})$ もコンパクトである．系 6.3.4.1. より，像 $\tilde{x}(\widetilde{\mathbb{N}})$ は有界であり，$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \tilde{x}(\widetilde{\mathbb{N}})$ も有界である． ■

系 8.2.3 X を位相空間とし，(x_n) を X の点列とする．(x_n) は $a \in X$ に収束するとする．

1. Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．f が a で連続ならば，Y の点列 $(f(x_n))$ は $f(a) \in Y$ に収束する．

2. (x_n) は $b \in X$ にも収束するとする．X がハウスドルフならば，$a = b$ である． □

証明 1. 連続写像 $\tilde{x}\colon \widetilde{\mathbb{N}} \to X$ を式 (8.2) で定める．合成写像 $f \circ \tilde{x}\colon \widetilde{\mathbb{N}} \to Y$ は ∞ で連続だから，$(f(x_n))$ は $f(a)$ に収束する．

2. 点列 (x_n) を，$x(n) = x_n$ で定まる写像 $x\colon \mathbb{N} \to X$ と考える．$\mathbb{N}$ は $\widetilde{\mathbb{N}}$ の稠密な部分集合だから，系 6.1.7 より，x を延長する連続写像 $\widetilde{\mathbb{N}} \to X$ は一意的である． ■

X がハウスドルフであり，X の点列 (x_n) が $a \in X$ に収束するとき，a を (x_n) の**極限**とよび，$\lim_{n\to\infty} x_n$ で表わす．位相空間 $\mathbb{S}$ の定数点列 1 は，0 にも 1 にも収束する．

系 8.2.4 X を位相空間とし，A を X の部分集合とする．

$$B = \{a \in X \mid a \text{ に収束する } A \text{ の点列 } (x_n) \text{ が存在する }\}$$

とおく．

1. $\overline{A} \supset B$ である．

2.[AC] X が距離空間ならば，$\overline{A} = B$ である．　□

証明　1. A の点列 (x_n) が，$a \in X$ に収束するならば，$a \in \overline{A}$ であることを示せばよい．連続写像 $\tilde{x}\colon \widetilde{\mathbb{N}} \to X$ を，式 (8.2) で定める．命題 4.3.4(1)⇒(3) より，$\tilde{x}(\widetilde{\mathbb{N}}) \subset \overline{A}$ であり，$\tilde{x}(\infty) = a \in \overline{A}$ である．

2. $\overline{A} \subset B$ を示す．$a \in \overline{A}$ とする．任意の $n \geq 1$ に対し，$U_{\frac{1}{n}}(a) \cap A \neq \emptyset$ である．したがって選択公理より，点列 $(x_n) \in \prod_{n\geq 1}(U_{\frac{1}{n}}(a) \cap A)$ が存在する．$\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$ だから，$a = \lim_{n\to\infty} x_n \in B$ である．　■

点列の収束よりも，弱い条件を考える．

定義 8.2.5　1. X を集合とし，(x_n) を X の点列とする．(m_n) が $m_{n+1} > m_n$ をみたす自然数列であるとき，点列 (x_{m_n}) は (x_n) の**部分列** (subsequence) であるという．

2. X を位相空間とする．X の任意の点列 (x_n) に対し (x_n) の収束する部分列が存在するとき，X は**点列コンパクト** (sequentially compact) であるという．　□

位相空間の点列 (x_n) が $a \in X$ に収束するならば，任意の部分列 (x_{m_n}) も $a \in X$ に収束する．

補題 8.2.6　X を距離空間とする．X の点列 (x_n) と X の点 a について，次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) (x_n) の部分列 (x_{m_n}) で，a に収束するものが存在する．

(2) $A = \{(x_n, n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X \times \widetilde{\mathbb{N}}$ とし，$\overline{A}$ を積位相に関する閉包とすると，$(a, \infty) \in \overline{A}$ である．

(3) 任意の自然数 m に対し，$\inf_{n \geq m} d(x_n, a) = 0$ である．　□

証明　(1)⇒(2): 部分列 (x_{m_n}) が a に収束するとする．$\widetilde{\mathbb{N}}$ の点列 (m_n) は ∞ に収束するから，A の点列 (x_{m_n}, m_n) は $(a, \infty) \in X \times \widetilde{\mathbb{N}}$ に収束する．よって，系 8.2.4.1. より，$(a, \infty) \in \overline{A}$ である．

(2)⇒(3): $(a,\infty)\in\overline{A}$ とし，m を自然数とする．任意の実数 $r>0$ に対し，$U_r(a)\times(\{n\in\mathbb{N}\mid n\geq m\}\cup\{\infty\})$ は $(a,\infty)\in X\times\widetilde{\mathbb{N}}$ の開近傍である．よって，$A\cap(U_r(a)\times(\{n\in\mathbb{N}\mid n\geq m\}\cup\{\infty\}))=\{(x_n,n)\mid d(x_n,a)<r, n\geq m\}$ は空でない．したがって，$d(x_n,a)<r$ をみたす自然数 $n\geq m$ が存在し，$\inf_{n\geq m} d(x_n,a)<r$ である．$r>0$ は任意だから，$\inf_{n\geq m} d(x_n,a)=0$ である．

(3)⇒(1): $m_0=0$ とおき，$n\geq 1$ に対し，次のように，数列 (m_n) を帰納的に定める．$\inf_{m\geq m_{n-1}+1} d(x_m,a)=0$ だから，$d(x_m,a)<\frac{1}{n}$ をみたす自然数 $m>m_{n-1}$ が存在する．m_n を，$d(x_m,a)<\frac{1}{n}$ をみたす最小の自然数 $m>m_{n-1}$ とする．このとき，部分列 (x_{m_n}) は a に収束する．■

コンパクト距離空間は点列コンパクトであることを示す．

命題 8.2.7 1. X がコンパクト距離空間ならば，X は点列コンパクトである．

2. **（ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理）** (x_n) を $\mathbb{R}^m$ の有界な点列とすると，収束する部分列 (x_{m_n}) が存在する．□

命題 8.2.7.1. とは逆に，点列コンパクトな距離空間はコンパクトであることを，定理 8.3.5 で証明する．距離空間でないコンパクト空間は点列コンパクトとは限らない（問題 8. 3.8.6.）．

証明 1. (x_n) を X の点列とし，$A=\{(x_n,n)\mid n\in\mathbb{N}\}\subset X\times\widetilde{\mathbb{N}}$ の閉包を $\overline{A}$ とする．X がコンパクトならば，命題 6.4.4 より，射影 $\mathrm{pr}_2\colon X\times\widetilde{\mathbb{N}}\to\widetilde{\mathbb{N}}$ は，閉写像である．よって，$\mathrm{pr}_2(\overline{A})\subset\widetilde{\mathbb{N}}$ は，$\mathbb{N}=\mathrm{pr}_2(A)$ を部分集合として含む閉集合だから $\mathrm{pr}_2(\overline{A})=\widetilde{\mathbb{N}}$ であり，$(a,\infty)\in\mathrm{pr}_2(\overline{A})$ をみたす $a\in X$ が存在する．補題 8.2.6(2)⇒(1) より，a に収束する部分列 (x_{m_n}) が存在する．

2. (x_n) が $\mathbb{R}^m$ の有界な点列ならば，実数 $M>0$ で，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $x_n\in[-M,M]^m$ となるものが存在する．命題 6.4.6 より，有界閉集合 $[-M,M]^m$ はコンパクトだから，1. より，(x_n) の収束する部分列 (x_{m_n}) が存在する．■

まとめ

・位相空間の点列が収束するとは，離散空間 $\mathbb{N}$ からの写像と考えたときに，1 点コンパクト化からの連続写像に延長されることである．

・距離空間の点列が収束するとは，極限からの距離が 0 に収束することである．

・コンパクト距離空間の点列は，収束するとは限らないが，収束する部分列がある．

問題

A 8.2.1　(x_n) を位相空間 X の点列とする．

1. (x_n) が $a \in X$ に収束するならば，(x_n) の任意の部分列は a に収束することを示せ．

2. X を距離空間とし，$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ とおく．$a \in X$ が A の集積点ならば，a に収束する (x_n) の部分列が存在することを示せ．

A 8.2.2　$X = [0,1]$ とし，$\| \ \|_1$ を $C([0,1])$ の L^1 ノルムとする．

1. $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を，$f(0) = 0$，$f(\frac{1}{2}) = 1$，$f(x) = 0$ $(x \geq 1)$ をみたす連続関数とする．$C([0,1])$ の関数列 (f_n) を，$f_n(x) = f(nx)$ で定める．関数列 (f_n) は，定数関数 0 に単純収束することと，L^1 収束することを示せ．一様収束はしないことも示せ．

2. $C([0,1])$ の一様収束位相は，L^1 ノルムが定める位相より，真に細かいことを示せ．

3. $C([0,1])$ を単純収束位相により，位相空間と考える．値写像 $C([0,1]) \times [0,1] \to \mathbb{R}$ は，積位相に関して連続でないことを示せ．

BP 8.2.3 $^{\mathrm{AC}}$　X を距離空間とし，Y を位相空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ について，次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) f は連続である．

(2) X の点列 (x_n) が $a \in X$ に収束するならば，Y の点列 $(f(x_n))$ は $f(a)$ に収束する．

8.3　完備性

実数列の収束については，コーシーの判定法とよばれる必要十分条件がある．一般の距離空間に対しても，コーシーの判定法がなりたつ空間は，応用上とくに重要である．

定義 8.3.1 X を距離空間とする．

1. X の点列 (x_n) が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは，

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{n\geq m, n'\geq m} d(x_n, x_{n'})\right) = 0$$

であることをいう．

2. X の任意のコーシー列が収束するとき，X は**完備** (complete) であるという． □

【例 8.3.2】 $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\} \subset \mathbb{R}$ とし，d_1 を $\mathbb{R}$ のふつうの距離の X への制限，d_2 を $X \times X \setminus \Delta_X$ の特性関数とする．X の点列 $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ は，d_1 についてはコーシー列だが，d_2 についてはコーシー列ではない．したがって，X は d_1 については完備ではない．一方 d_2 についてはコーシー列は途中から定数列になるものしかないから，X は d_2 については完備である．d_1 が定める X の位相と d_2 が定める X の位相は，どちらも離散位相である．したがって，距離空間のコーシー列や完備性は，位相だけで定まるものではないことがわかる．

コーシー列を，**基本列** (fundamental sequence) ということもある．

補題 8.3.3 X を距離空間とし，(x_n) を X の点列とする．

1. (x_n) が X の点に収束するならば，(x_n) はコーシー列である．
2. (x_n) がコーシー列であり，部分列 (x_{m_n}) が $a \in X$ に収束するならば，(x_n) は a に収束する．
3. (x_n) がコーシー列ならば，(x_n) は有界である．
4. (x_n) がコーシー列ならば，$a \in X$ に対し，実数列 $d(x_n, a)$ もコーシー列である． □

証明 1. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ とする．$d(x_n, x_{n'}) \leq d(x_n, a) + d(x_{n'}, a)$ だから，$\sup_{n\geq m, n'\geq m} d(x_n, x_{n'}) \leq 2\sup_{n\geq m} d(x_n, a)$ である．$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{n\geq m} d(x_n, a)\right) = 0$ だから，$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{n\geq m, n'\geq m} d(x_n, x_{n'})\right)$ も 0 である．

2. $d(x_n,a) \le d(x_n,x_{n'}) + d(x_{n'},a)$ より，右辺第 1 項の上限をはじめにとれば，

$$\sup_{n\ge m} d(x_n,a) \le \sup_{n\ge m, n'\ge m} d(x_n,x_{n'}) + \inf_{n'\ge m} d(x_{n'},a)$$

である．部分列 (x_{m_n}) が $a \in X$ に収束するならば，補題 8.2.6(1)⇒(3) より，右辺第 2 項は 0 である．よって，(x_n) がコーシー列ならば，(x_n) は a に収束する．

3.　m を $\sup_{n\ge m, n'\ge m} d(x_n,x_{n'}) \le 1$ をみたす自然数とする．$M = \max(d(x_0,x_m),\ldots,d(x_{m-1},x_m),1)$ とすれば，任意の自然数 n に対し，$d(x_n,x_m) \le M$ である．

4.　$|d(x_n,a) - d(x_m,a)| \le d(x_n,x_m)$ だから，(x_n) がコーシー列ならば，$d(x_n,a)$ もコーシー列である．■

命題 8.3.4　距離空間 $\mathbb{R}^n$ は完備である．□

証明　(x_k) を $\mathbb{R}^n$ のコーシー列とする．補題 8.3.3.3. より，(x_k) は有界である．よって，命題 8.2.7.2. より，(x_k) の収束する部分列 (x_{m_k}) が存在する．補題 8.3.3.2. より，(x_k) は $\lim_{k\to\infty} x_{m_k}$ に収束する．よって，$\mathbb{R}^n$ は完備である．■

とくに $n = 1$ とすれば，距離空間 $\mathbb{R}$ は完備である．これを**実数の完備性** (completeness) という．実数の完備性は，実数列 (x_n) について，それが収束することと，コーシー列であることが同値であるということである．これを**コーシーの判定法** (Cauchy's criterion) という．

よりみち 98　実数の完備性の証明を復習してみると，次の順に証明している．

(1) 実数の連続性（定理 3.1.5）．

(2) 閉区間の連結性（命題 6.2.5）．

(3) 閉区間のコンパクト性（定理 6.3.6，ハイネ・ボレルの定理）．

(4) 閉区間の点列コンパクト性（命題 8.2.7.2.，ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理）．

(5) 実数の完備性（命題 8.3.4，コーシーの判定法）．

逆に，実数の完備性とアルキメデス性（問題 3.1.3）から，実数の連続性を導

くことができる（問題 8.3.5）．

実数の連続性から閉区間のコンパクト性を導くには，問題 6.4.5 のように，2 進小数展開を使った区間縮小法による方法もある．

完備性を使って，距離空間がコンパクトであるための必要十分条件を与える．コンパクトな距離空間は完備だが，その逆はなりたたない．たとえば，命題 8.3.4 より，$\mathbb{R}$ は完備だが，コンパクトではない．

定理 8.3.5 $^{\mathrm{AC}}$ 距離空間 X について，次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) X はコンパクトである．

(2) X は点列コンパクトである．

(3) X は完備かつ全有界である．□

（証明の前に）定理 8.3.5 の核心部分は，(3)⇒(1) である．これは，次のように証明する．X が全有界という仮定を使って，コーシー列からなる空間 C を構成する．空間 C は，離散有限集合の無限積の閉部分空間であり，チコノフの定理よりコンパクトである．X が完備という仮定より，C の元であるコーシー列をその極限にうつす写像 $l\colon C \to X$ が定義される．C の構成より，l は全射である．l が連続であることを確認すれば，X のコンパクト性が示される．

定理 8.3.5(3)⇒(1) のこの証明は，区間縮小法による閉区間のコンパクト性の証明（問題 6.4.5）とよく似ている．

証明 (1)⇒(2): 命題 8.2.7.1. で示した．

(2)⇒(3)$^{\mathrm{AC}}$: X が点列コンパクトなら完備であることを示す．(x_n) を X のコーシー列とする．X が点列コンパクトならば，収束する部分列 (x_{m_n}) が存在する．補題 8.3.3.2. より，コーシー列 (x_n) は $\lim_{n\to\infty} x_{m_n}$ に収束する．

X が点列コンパクトなら，全有界であることを示す．対偶を示す．X が全有界でないと仮定する．実数 $r > 0$ で，任意の有限部分集合 $A \subset X$ に対し $X \supsetneqq \bigcup_{a\in A} U_r(a)$ であるものが存在する．X の点列 (x_n) を次のように帰納的に定める．X は空でないから，$x_0 \in X$ を任意にとる．$x_0, \ldots, x_n \in X$ まで定まったとき，x_{n+1} を $x \notin U_r(x_0) \cup \cdots \cup U_r(x_n)$ をみたすものとする．この

とき，任意の $0 \leq m < n$ に対し，$d(x_m, x_n) \geq r$ である．よって，点列 (x_n) のどの部分列も収束しない．

(3)⇒(1)$^{\mathrm{AC}}$: X は全有界かつ完備とする．X は全有界だから選択公理より，X の有限部分集合の列 (A_n) で，次の条件をみたすものが存在する：任意の自然数 n と任意の $x \in X$ に対し，A_n の点 a で $d(x, a) < \frac{1}{2^n}$ をみたすものが存在する．離散有限空間の無限積空間 $A = \prod_n A_n$ は，定理 6.4.8 より，コンパクトである．A の部分空間 C を，$C = \{(a_n) \in A \mid$ すべての自然数 n に対し $d(a_n, a_{n+1}) \leq \frac{3}{2^{n+1}}\}$ で定める．$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{(a_m) \in A \mid d(a_n, a_{n+1}) \leq \frac{3}{2^{n+1}}\}$ であり，自然数 n に対し射影の積 $\mathrm{pr}_n \times \mathrm{pr}_{n+1} \colon A \to A_n \times A_{n+1}$ は連続だから，C は A の閉部分空間である．よって，系 6.4.2.1. より，C はコンパクトである．

全射 $l \colon C \to X$ を定める．$(a_n) \in C$ とすると，自然数 $n \leq m$ に対し，$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a_{n+1}) + \cdots + d(a_{m-1}, a_m) \leq \frac{3}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{3}{2^m} \leq \frac{3}{2^n}$ だから，(a_n) は X のコーシー列である．X は完備だから，$(a_n) \in C$ を極限 $\lim_{n\to\infty} a_n \in X$ にうつす写像 $l \colon C \to X$ が定まる．任意の $x \in X$ に対し，A の定義と選択公理より，点列 $a = (a_n) \in A$ で，$d(a_n, x) < \frac{1}{2^n}$ をみたすものが存在する．任意の自然数 n に対し $d(a_n, a_{n+1}) \leq d(a_n, x) + d(a_{n+1}, x) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2^{n+1}}$ だから，$a \in C$ である．点列 (a_n) は x に収束するから，$l(a) = x$ である．よって，$l \colon C \to X$ は全射である．

l が連続であることを示す．$a = (a_n) \in C$ とし n を自然数とすると，$d(a_n, l(a)) \leq \frac{3}{2^n}$ である．$r > 0$ を実数とし，m を $\frac{6}{2^n} < r$ をみたす最小の自然数 n とすると，$a = (a_n), b = (b_n) \in C$ が $a_m = b_m$ をみたすならば，$d(l(a), l(b)) \leq d(a_m, l(a)) + d(b_m, l(b)) \leq \frac{6}{2^m} < r$ である．したがって，$\mathrm{pr}_m^{-1}(\mathrm{pr}_m(a)) \subset l^{-1}(U_r(l(a)))$ であり，全射 $l \colon C \to X$ は連続である．C はコンパクトだから，系 6.4.3 より，X もコンパクトである．■

距離空間の部分集合の完備性について，次がなりたつ．これは，ハウスドルフ空間の部分集合のコンパクト性についての，命題 6.5.3.1. とよく似ている．

命題 8.3.6　X を距離空間とする．X の部分空間 A について，次の条件 (1) と (2) を考える．

(1) A は完備である．

(2) A は X の閉集合である．

(1) ならば (2) である．X が完備ならば，(1) と (2) は同値である． □

証明 (1)⇒(2)$^{\mathrm{AC}}$: $a \in \overline{A}$ として，$a \in A$ を示せばよい．系 8.2.4.2.$^{\mathrm{AC}}$ より，a に収束する A の点列 (x_n) がある．(x_n) はコーシー列で，A は完備だから，(x_n) は A の点に収束する．系 8.2.3.2. より，$a \in A$ である．

(2)⇒(1): (x_n) を A のコーシー列とする．X が完備なら，(x_n) は X の点 a に収束する．A は閉集合だから，$a \in A$ であり，したがって A は完備である． ■

命題 8.3.6 と命題 8.3.4 より，$\mathbb{R}^n$ の部分空間について，完備であることと，閉部分空間であることは同値である．したがって，開区間 $(0,1)$ は $\mathbb{R}$ と同相であるが，完備距離空間ではない．

命題 8.3.7 X を集合とすると，ノルム空間 $\widetilde{B}(X)$ は完備である． □

証明 (f_n) を $\widetilde{B}(X)$ のコーシー列とする．任意の $x \in X$ と自然数 $n, m \in \mathbb{N}$ に対し，$|f_n(x) - f_m(x)| \leq d(f_n, f_m)$ だから，数列 $(f_n(x))$ はコーシー列であり，収束する．関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ を，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で定める．補題 8.3.3.4. より，数列 $(\|f_n\|_\infty)$ もコーシー列であり収束する．任意の $x \in X$ に対し，$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty$ だから，$f \in \widetilde{B}(X)$ である．

(f_n) が f に収束することを示す．m を自然数とすると，任意の $x \in X$ に対し，

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{n\geq m} d(f_n, f_m)$$

だから，$d(f, f_m) \leq \sup_{n\geq m} d(f_n, f_m)$ である．(f_n) はコーシー列だから，$\lim_{m\to\infty} d(f, f_m) \leq \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} d(f_n, f_m) = 0$ であり，(f_n) は f に収束する． ■

系 8.3.8 X を位相空間とする．$\widetilde{B}(X)$ の部分空間 $B(X) = \{f \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R}) \mid f$ は有界かつ連続$\}$ は，上限ノルムに関して完備である． □

証明 命題 5.2.11 より，$B(X)$ は $\widetilde{B}(X)$ の閉部分空間である．よって，命題 8.3.6 より，$B(X)$ は完備である． ■

定義 8.3.9　X を距離空間とする．Y が完備距離空間，$f\colon X \to Y$ が等長写像であり，像 $f(X)$ が Y で稠密であるとき，Y は f に関して X の**完備化** (completion) であるという．□

$\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ の完備化であり，閉区間 $[0,1]$ は開区間 $(0,1)$ の完備化である．任意の距離空間に対し，その完備化が存在し，それは本質的に一意的であることを，命題 8.3.6 と系 8.3.8 を使って示す．

命題 8.3.10　X を距離空間とする．$x \in X$ に対し，$d(x,\ )\colon X \to \mathbb{R}$ を，$y \in X$ を $d(x,y)$ にうつす関数とする．写像 $D_X\colon X \to \mathrm{Map}(X,\mathbb{R})$ を，$D_X(x) = d(x,\ )$ で定める．$a \in X$ とする．

1. $x \in X$ ならば，$D_X(x) - D_X(a) \in B(X)$ である．$x \in X$ を $D_X(x) - D_X(a) \in B(X)$ にうつす写像 $i\colon X \to B(X)$ は，等長写像である．

2. 等長写像 $i\colon X \to B(X)$ の像の閉包 $\overline{i(X)}$ は，X の完備化である．

3. Y を距離空間，$f\colon X \to Y$ を等長写像とし，Y は f に関して X の完備化であるとする．$y \in Y$ に対し，関数 $\widetilde{D}_X(y)\colon X \to \mathbb{R}$ を $\widetilde{D}_X(y)(x) = d(y, f(x))$ で定め，写像 $\tilde{i}\colon Y \to B(X)$ を，$\tilde{i}(y) = \widetilde{D}_X(y) - D_X(a)$ で定める．写像 $\tilde{i}$ は，可逆な等長写像 $Y \to \overline{i(X)}$ を定め，$\tilde{i} \circ f = i$ である．□

証明　1. 式 (5.2) で $a, x, y \in X$ を $x, y, z \in X$ でおきかえれば，

$$|D_X(x)(y) - D_X(x)(z)| = |d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z) \tag{8.3}$$

である．よって，$D_X(x) \in C(X)$ である．式 (5.2) で a を z でおきかえれば，$|D_X(x)(z) - D_X(y)(z)| = |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ である．よって，$D_X(x) - D_X(y) \in B(X)$ であり，$\|D_X(x) - D_X(y)\|_\infty = \sup_{z \in X} |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ である．$|d(x,y) - d(y,y)| = d(x,y)$ だから，$d(i(x), i(y)) = \|D_X(x) - D_X(y)\|_\infty = d(x,y)$ である．

2. $\overline{i(X)}$ は，完備距離空間 $B(X)$ の閉集合だから，命題 8.3.6 より完備である．1. より i は等長写像であり，$i(X)$ は $\overline{i(X)}$ で稠密である．

3. 1. と同様に，$y \in Y$ ならば $\widetilde{D}_X(y) \in C(X)$ である．$y, z \in Y$, $x \in X$ とすると，式 (8.3) より，$|\widetilde{D}_X(y)(x) - \widetilde{D}_X(z)(x)| = |d(y, f(x)) - d(z, f(x))| \leq d(y,z)$ である．f は等長写像だから，$x \in X$ に対し，$\widetilde{D}_X(f(x)) = D_X(x)$ であ

る．よって，$\tilde{i}(y) = \widetilde{D}_X(y) - D_X(a) = \widetilde{D}_X(y) - \widetilde{D}_X(f(a)) \in B(X)$ であり，$\tilde{i}(f(x)) = i(x)$ である．

$\tilde{i}\colon Y \to B(X)$ が等長写像であることを示す．$y, z \in Y$ に対し，$d(\tilde{i}(y), \tilde{i}(z)) \leq d(y,z)$ であり，写像 $\tilde{i}\colon Y \to B(X)$ は連続である．したがって，関数 $\tilde{d}\colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ を $\tilde{d}(y,z) = d(\tilde{i}(y), \tilde{i}(z))$ で定めると，$\tilde{d}$ は連続である．$i\colon X \to B(X)$ と $f\colon X \to Y$ は等長写像だから，$x, x' \in X$ に対し $\tilde{d}(f(x), f(x')) = d(\tilde{i}(f(x)), \tilde{i}(f(x'))) = d(i(x), i(x')) = d(x, x') = d(f(x), f(x'))$ である．よって，$Y \times Y$ で定義された連続関数 $\tilde{d}$ と d の，$f(X) \times f(X)$ への制限は等しい．$f(X) \times f(X)$ は $Y \times Y$ で稠密だから，系 6.1.7 より，$\tilde{d} = d$ であり，$\tilde{i}\colon Y \to B(X)$ は等長写像である．

$f(X)$ は Y で稠密であり，$\tilde{i}(f(X)) = i(X)$ だから，$i(X) \subset \tilde{i}(Y) \subset \overline{i(X)}$ である．Y は完備で，$\tilde{i}$ は等長写像だから，$\tilde{i}(Y)$ も完備である．よって，命題 8.3.6 より，$\tilde{i}(Y)$ は $B(X)$ の閉集合であり，$\tilde{i}(Y) = \overline{i(X)}$ である． ■

完備距離空間の重要な性質を，2 つあげる．

定義 8.3.11　X を距離空間とし，$f\colon X \to X$ を写像とする．次の条件をみたす実数 $0 < r < 1$ が存在するとき，f は**縮小写像** (contracting mapping) であるという．

任意の $x, y \in X$ に対し，$d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x,y)$ がなりたつ． □

$f\colon X \to X$ が縮小写像ならば，f は連続である．

命題 8.3.12　X を距離空間とし，$f\colon X \to X$ を縮小写像とする．

1. $f(a) = a$ をみたす $a \in X$ は，存在すればただ 1 つである．
2. X が完備であり空でなければ，$f(a) = a$ をみたす $a \in X$ が存在する． □

証明　$0 < r < 1$ を，任意の $x, y \in X$ に対し，$d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x,y)$ をみたす実数とする．

1. $a, b \in X$ が，$f(a) = a$ と $f(b) = b$ をみたせば，$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq r \cdot d(a,b)$ である．$r < 1$ だから，$d(a,b) = 0$ であり，$a = b$ である．

2. $x \in X$ とし，自然数 $n \geq 0$ に対し $x_n = f^n(x)$ とおく．$n \geq m$ とすると，

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=m}^{n-1} r^i \cdot d(x_1, x_0) = \frac{r^m - r^n}{1-r} \cdot d(x_1, x_0) \leq \frac{r^m}{1-r} \cdot d(x_1, x_0)$$

である．よって，(x_n) はコーシー列である．X は完備だから，極限 $a = \lim_{n\to\infty} x_n \in X$ が存在する．$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$ である．■

命題 8.3.13 AC　X を完備距離空間とする．$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が X の稠密な開集合の列ならば，共通部分 $\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$ も稠密である．□

証明　命題 4.3.2.3. より，U を空でない任意の開集合として，$U \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n \neq \emptyset$ を示せばよい．U の点列 (x_n) と実数列 (r_n) で，任意の $n \geq 0$ に対し，$r_n > 0$，$U_{r_n}(x_n) \subset U \cap U_n$ と $r_{n+1} < \frac{r_n}{2}$，$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{r_n}{2}$ をみたすものを，帰納的に定める．

$U \cap U_0 \neq \emptyset$ だから，$x_0 \in U \cap U_0$ がある．さらに実数 $r_0 > 0$ を $U_{r_0}(x_0) \subset U \cap U_0$ をみたすようにとる．帰納的に $r_n > 0$ と $x_n \in U_{r_n}(x_n) \subset U \cap U_n$ まで定まったとする．$U_{\frac{r_n}{2}}(x_n) \subset U$ は空でない開集合だから，$U_{\frac{r_n}{2}}(x_n) \cap U_{n+1} \neq \emptyset$ である．$x_{n+1} \in U_{\frac{r_n}{2}}(x_n) \cap U_{n+1}$ をとり，$r_{n+1} > 0$ を，$r_{n+1} < \frac{r_n}{2}$ かつ $U_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset U_{\frac{r_n}{2}}(x_n) \cap U_{n+1}$ をみたすようにとる．$r_{n+1} < \frac{r_n}{2}$，$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{r_n}{2}$ であり，$U_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset U_{r_n}(x_n) \cap U_{n+1}$ である．

$m > n$ とすると，

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{1}{2}(r_{m-1} + \cdots + r_{n+1} + r_n) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{m-n-2}} + \cdots + 1\right) r_{n+1} + \frac{1}{2} r_n \leq r_{n+1} + \frac{1}{2} r_n < r_n \leq \frac{1}{2^n} r_0 \end{aligned}$$

だから，(x_n) はコーシー列である．X は完備だから，(x_n) は収束する．任意の $m > n \geq 0$ に対し $d(x_m, x_n) \leq r_{n+1} + \frac{1}{2} r_n$ だから，$a = \lim_{n\to\infty} x_n$ とおくと，$d(a, x_n) \leq r_{n+1} + \frac{1}{2} r_n < r_n$ である．よって，$a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} U_{r_n}(x_n) \subset U \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n \neq \emptyset$ である．■

系 8.3.14 AC **（ベールの定理）**　X を空でない完備距離空間とし，$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

X の閉集合の列とする．$X=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$ ならば，内部 A_n° が空でない n が存在する． □

証明 対偶を示す．任意の n に対し $A_n^\circ=\emptyset$ ならば $X\neq\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$ であることを示せばよい．$U_n=X_n\setminus A_n$ とおくと，U_n は稠密な開集合だから，命題 8.3.13 より，$\bigcap_{n=0}^{\infty}U_n$ は稠密である．$X\neq\emptyset$ だから，$X\setminus(\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n)=\bigcap_{n=0}^{\infty}U_n\neq\emptyset$ である． ■

まとめ

・点列の収束について，コーシーの判定法がなりたつ距離空間を完備距離空間という．

・$\mathbb{R}^n$ とその閉部分空間は完備である．

・距離空間がコンパクトなことは，点列コンパクトなことと同値であり，完備かつ全有界なこととも同値である．

・任意の距離空間は，有界連続関数の空間に等長にうめこめて，完備化が存在する．

・完備距離空間の縮小写像には，不動点がある．

・完備距離空間の稠密開集合の列の共通部分は稠密である．

問題

A 8.3.1 $g\colon\mathbb{R}\to[0,1]$ を，$g(x)=0$ $(x\leq 0)$，$g(x)=1$ $(x\geq 1)$ をみたす連続関数とする．$C([0,1])$ の関数列 (g_n) を，$g_n(x)=g(n(x-\frac{1}{2}))$ で定める．

1. (g_n) は，L^1 ノルムに関してコーシー列だが，収束列ではないことを示せ．
2. (g_n) は，最大値ノルムに関してコーシー列ではないことを示せ．

AP 8.3.2 (X,d_X) と (Y,d_Y) を完備距離空間とする．$X\times Y$ も，$d((x,y),(x',y'))=\sqrt{d_X(x,x')^2+d_Y(y,y')^2}$ で定まる距離 d について，完備距離空間であることを示せ．

B 8.3.3 集合 $X=\{$ 開区間 $(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}\cup\{\emptyset\}$ の距離 d を，

$$d(A,B)=\frac{1}{2}\times\begin{cases}((A\cup B\text{ の長さ})-(A\cap B\text{ の長さ})) & A\cap B\neq\emptyset\text{ のとき},\\ ((A\text{ の長さ})+(B\text{ の長さ})) & A\cap B=\emptyset\text{ のとき}\end{cases}$$

で定める．$f\colon\mathbb{R}\times(0,\infty)\to X$ を，対 (x,s) を開区間 $(x-s,x+s)$ にうつす写像とする．

1. $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ を $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間と考える．f は開うめこみであることを示せ．

2. 距離空間 (X, d) は完備であることを示せ．

B 8.3.4 X を空でない完備距離空間とする．X に孤立点がないならば，閉うめこみ $2^{\mathbb{N}} \to X$ が存在することを示せ．

B 8.3.5 実数の完備性とアルキメデス性から，実数の連続性を導け．

B 8.3.6 $C([0,1])$ の一様収束位相について，次を示せ．

1. $A = \{f \in C([0,1]) \mid f([0,1]) \subset [0,1]\}$ はコンパクトでない．

2. $B = \{f \in A \mid x, y \in [0,1]$ に対し $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|\}$ はコンパクトである．

B 8.3.7 V と W をノルム空間とし，$\| \ \|_V$ と $\| \ \|_W$ でそれぞれ V と W のノルムを表わす．$F \colon V \to W$ を連続線形写像とし，$0 < r < 1$ を実数とする．

1. 任意の $g \in W$ に対し，$\|f\|_V \leq \|g\|_W$ かつ $\|g - F(f)\|_W \leq r\|g\|_W$ をみたす $f \in V$ が存在するとする．V が完備ならば，F は全射であることを示せ．

2. 1. で，さらに，$f \in V$ が $\|f\|_V \leq (1-r)\|g\|_W$ をみたすようにとれるとする．このとき，任意の $g \in W$ に対し，$\|f\|_V \leq \|g\|_W$ かつ $F(f) = g$ をみたす $f \in V$ が存在することを示せ．

C 8.3.8 位相空間 X について，次の条件 (1)–(4) を考える．

(1) X はコンパクトである．

(2) X は点列コンパクトである．

(3) X の離散閉部分集合は有限集合である．

(4) X が空であるかまたは，任意の連続関数 $f \colon X \to \mathbb{R}$ に最大値がある．

1. (1)⇒(3) と (2)⇒(3)$^{\mathrm{AC}}$ を示せ．

2.$^{\mathrm{AC}}$ X がハウスドルフならば (3)⇒(4) であることを示せ．

3.$^{\mathrm{AC}}$ X が正規空間ならば，(4)⇒(3) であることを示せ．(ヒント：ティーツェの拡張定理（問題 8.4.10）を使う．)

4.$^{\mathrm{AC}}$ X が距離空間ならば，条件 (1)−(4) はすべて同値であることを示せ．

5.$^{\mathrm{AC}}$ X を積空間 $[0,1]^{\mathbb{R}}$ とし，$A = \{f \in X \mid f^{-1}((0,1])$ は可算集合 $\}$ とおく．A は点列コンパクトだが，コンパクトでないことを示せ．

6.$^{\mathrm{AC}}$ U を，$X = [0,1]^{\mathbb{R}}$ から定数関数 1 をのぞいて得られる開集合 $U = X \setminus \{1\}$ とする．U は局所コンパクトであり，(4) をみたすが，(3) をみたさず，したがって点列コンパクトでなく，正規でもないことを示せ．

7.$^{\mathrm{AC}}$ 積空間 $[0,1]^{(2^{\mathbb{N}})}$ はコンパクトだが点列コンパクトではないことを示せ．

8.4 可算性と距離づけ

位相空間の近傍系や開集合系に関して，可算性の条件を定義する．開集合系の基底と開近傍の基本系の定義を復習しておく．X を位相空間とする．X の開集合系 $\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{U}$ が $\mathcal{O}$ の基底であるとは，X の任意の開集合 U と任意の $x \in U$ に対し，$V \in \mathcal{U}$ で $x \in V \subset U$ をみたすものが存在することである．$x \in X$ とする．x の開近傍からなる集合 $\mathcal{U}$ が x の開近傍の基本系であるとは，x の任意の開近傍 U に対し，$V \in \mathcal{U}$ で $V \subset U$ をみたすものが存在することである．

定義 8.4.1 X を位相空間とする．

1. 任意の $x \in X$ に対し，x の開近傍の基本系で，可算集合であるものが存在するとき，X は**第 1 可算** (first-countable) であるという．

2. X の開集合系の基底で，可算集合であるものが存在するとき，X は**第 2 可算** (second-countable) であるという．

3. X の稠密な可算部分集合が存在するとき，X は**可分** (separable) であるという．

4. X を局所コンパクト空間とする．X のコンパクト集合の列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ をみたすものが存在するとき，X は $\overset{\text{シグマ}}{\sigma}$ **コンパクト** (σ-compact) であるという． □

命題 8.4.2 X を位相空間とする．

1. $\mathcal{U}$ が X の開集合系の基底ならば，X の任意の点 x に対し，$\mathcal{U}_x = \{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\} \subset \mathcal{U}$ は，x の開近傍の基本系である．X が第 2 可算ならば，X は第 1 可算である．

2. $^{\mathrm{AC}}$ X が第 2 可算ならば，X は可分である． □

証明 1. $\mathcal{U}$ を開集合系の基底とし，$x \in X$ とする．$U \in \mathcal{U}_x$ ならば，U は x の開近傍である．V を x の開近傍とする．$\mathcal{U}$ が X の開集合系の基底ならば，$x \in U \subset V$ をみたす $U \in \mathcal{U}$ が存在する．$U \in \mathcal{U}_x$ だから，$\mathcal{U}_x$ は x の開近傍の基本系である．

$\mathcal{U}$ が可算ならば，$\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}$ も可算である．

2. $\mathcal{U}$ を開集合系の基底とする．$\emptyset \notin \mathcal{U}$ であると仮定してよい．$(a_U)_U \in \prod_{U\in\mathcal{U}} U$ とし，$A = \{a_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ とおく．V を空でない開集合とすると，$U \subset V$ をみたす $U \in \mathcal{U}$ があり，$a_U \in A \cap V \neq \emptyset$ である．よって，A は稠密である．$\mathcal{U}$ が可算ならば，A も可算である．■

命題 8.4.3　X を距離空間とする．

1. X は第 1 可算である．

2. A が X の稠密な部分集合ならば，$\mathcal{U}_A = \{U_{\frac{1}{n}}(a) \mid a \in A, n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ は X の開集合系の基底である．

3.$^{\mathrm{AC}}$ X が全有界なら，X は可分である．□

証明　1. 命題 5.2.3 と実数のアルキメデス性より，$x \in X$ に対し，$\{U_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ は開近傍の可算基本系である．

2. U を X の開集合とし，$x \in X$ とする．$U_r(x) \subset U$ をみたす実数 $r > 0$ が存在し，実数のアルキメデス性より，$n \geq \frac{2}{r}$ をみたす自然数 n も存在する．A は稠密だから，$U_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$ の元 a が存在する．$\frac{1}{n} + d(x,a) < \frac{2}{n} \leq r$ だから，$x \in U_{\frac{1}{n}}(a) \subset U_r(x) \subset U$ である．よって，$\mathcal{U}_A$ は X の開集合系の基底である．

3. X の有限部分集合の族 $(A_n)_{n\geq 1}$ で，次の条件をみたすものが存在する．

任意の自然数 $n \geq 1$ と任意の $x \in X$ に対し，$d(x,a) \leq \frac{1}{n}$ をみたす $a \in A_n$ が存在する．$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は可算集合であり，稠密である．■

系 8.4.4　X を距離空間とすると，次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) X は可分である．

(2) X は第 2 可算である．□

証明　(1)⇒(2): A が X の稠密な可算部分集合ならば，命題 8.4.3.1. の X の基底 $\mathcal{U}_A$ は，可算集合である．

(2)⇒(1)$^{\mathrm{AC}}$: 命題 8.4.2.2. で示されている．■

定義 8.4.5　X を位相空間とし，X の位相を $\mathcal{O}$ とする．$\mathcal{O}$ を定義する X の距離が存在するとき，X は**距離づけ可能** (metrizable) であるという．□

命題 8.4.6 積空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は距離づけ可能であり，可分であり，第 2 可算である． □

証明 $\mathbb{R}$ は空でない開区間と同相だから，積空間 $A = \prod_{n=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n})$ が距離づけ可能なことを示せばよい．l^{∞} は距離空間だから，包含写像 $i\colon A \to l^{\infty}$ がうめこみであることを示せばよい．$r > 0$ を実数とすると，$a = (a_n)_n \in A$ に対し，$U_r(a) \cap A = \prod_{n \leq \frac{1}{r}} U_r(a_n) \times \prod_{n > \frac{1}{r}} (0, \frac{1}{n})$ である．よって，$i\colon A \to l^{\infty}$ はうめこみである．

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の可算部分集合

$$\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} = \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{すべての } n \text{ に対し } x_n \in \mathbb{Q} \text{ であり，} \\ \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq 0\} \text{ は有限集合} \end{array} \right\}$$

は稠密である．系 8.4.4(1)⇒(2) より，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は第 2 可算である． ■

定理 8.4.7 位相空間 X について，次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) X は可分かつ距離づけ可能である．

(2) X は第 2 可算かつ正規である．

(3) うめこみ $X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ が存在する． □

よりみち 99 定理 8.4.7 の (2)⇒(1) を，ウリゾンの距離づけ定理という．この定理や，前節で解説したコンパクト距離空間の特徴づけ（定理 8.3.5）は，20 世紀はじめにおける抽象的な位相空間論の頂点を飾るものだった．

定理 8.4.7(2)⇒(3) は，次の補題を使って証明する．

補題 8.4.8 X を正規空間とする．A を X の閉集合，U を X の開集合で，$A \subset U$ をみたすものとする．

1. X の閉集合 B と，X の開集合 V で，$A \subset V \subset B \subset U$ をみたすものが存在する．

2.[AC]（**ウリゾンの補題**） 連続関数 $f : X \to [0,1]$ で，$A \subset f^{-1}(0) \subset f^{-1}([0,1)) \subset U$ をみたすものが存在する． □

証明　1. $C = X \setminus U$ は X の閉集合で $A \cap C = \emptyset$ だから，X の開集合 V, W で，$A \subset V$, $C \subset W, V \cap W = \emptyset$ をみたすものが存在する．$B = X \setminus W$ とおけばよい．

2. $\emptyset = U_0 \subset A = A_0 \subset U = U_1 \subset X = A_1$ とおく．自然数 $m \geq 0$ に対し $I_m = \{\frac{n}{2^m} \mid 0 \leq n \leq 2^m, n \in \mathbb{N}\}$ とおき，$I = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_m$ とおく．X の閉集合の族 $(A_r)_{r \in I}$ と X の開集合の族 $(U_r)_{r \in I}$ で，条件

$(U): s < t$ ならば $U_s \subset A_s \subset U_t \subset A_t$

をみたすものが存在することを示す．$r \in I_0 = \{0, 1\}$ に対しては，すでに定めた．自然数 $m \geq 0$ に対し，$(A_r)_{r \in I_m}$ と $(U_r)_{r \in I_m}$ が条件 (U) をみたすならば，1. より，条件 (U) をみたす $(A_r)_{r \in I_{m+1}}$ と $(U_r)_{r \in I_{m+1}}$ が存在する．よって，命題 2.9.1.2. より，条件 (U) をみたす $(A_r)_{r \in I}$ と $(U_r)_{r \in I}$ が存在する．

自然数 m に対し，上半連続関数 $f_m \colon X \to [0, 1]$ と下半連続関数 $g_m \colon X \to [0, 1]$ を，$f_m = \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^{2^m - 1} (1 - \chi_{U_{\frac{n}{2^m}}})$，$g_m = \frac{1}{2^m} \sum_{n=1}^{2^m} (1 - \chi_{A_{\frac{n}{2^m}}})$ で定義する．$m' > m$ なら $g_m \leq g_{m'} \leq f_{m'} \leq f_m = g_m + \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^{2^m - 1} \chi_{A_{\frac{n+1}{2^m}} \setminus U_{\frac{n}{2^m}}} \leq g_m + \frac{2}{2^m}$ である．よって，上半連続関数 $f = \inf\limits_m f_m \colon X \to [0, 1]$ は下半連続関数 $\sup\limits_m g_m$ と等しく，系 5.1.5 より連続である．$x \in A$ なら，任意の m に対し $g_m(x) = 0$ であり，$f(x) = 0$ である．$x \notin U$ なら，任意の m に対し $f_m(x) = 1$ であり，$f(x) = 1$ である．■

定理 8.4.7 の証明　(2)⇒(3)$^{\mathrm{AC}}$: $\mathcal{U}$ を開集合系の可算基底とし，$I = \{(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid \overline{V} \subset U\}$ とおく．$I \subset \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ も可算である．補題 8.4.8.2. と選択公理より，連続関数 $f_{UV} : X \to [0, 1]$ の族 $(f_{UV})_{(U,V) \in I}$ で，任意の $(U, V) \in I$ に対し $\overline{V} \subset f_{UV}^{-1}(0) \subset f_{UV}^{-1}([0, 1)) \subset U$ をみたすものがある．連続写像 $f : X \to [0, 1]^I$ を，$f(x) = (f_{UV}(x))$ で定義する．X の位相は，$[0, 1]^I$ の位相の f によるひきもどしであることを示す．f は連続だから，$\mathcal{V} = \{f_{UV}^{-1}([0, 1)) \mid (U, V) \in I\}$ が X の位相の基底であることを示せばよい．

$x \in U \in \mathcal{U}$ とすると，補題 8.4.8.1. より，開集合 W と閉集合 B で，$x \in W \subset B \subset U$ をみたすものがある．$\mathcal{U}$ は開集合系の基底だから，$x \in V \subset W$ をみたす $V \in \mathcal{U}$ がある．$\overline{V} \subset B \subset U$ だから，$(U, V) \in I$ であり，$x \in V \subset f_{UV}^{-1}([0, 1)) \subset U$ である．よって，$\mathcal{V}$ は X の位相の基底であり，X の位相は $[0, 1]^I$ の位相の f によるひきもどしである．X はハウスドルフだから，f は単射であり，うめこみである．

(3)⇒(1)$^{\mathrm{AC}}$: 命題 8.4.6 より，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は距離づけ可能かつ第 2 可算である．うめこみ $X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ があれば，X も距離づけ可能かつ第 2 可算である．系 8.4.4 (2)⇒(1)$^{\mathrm{AC}}$ より，X は可分である．

(1)⇒(2): 系 8.4.4(1)⇒(2) と命題 6.1.10 からしたがう． ■

系 8.4.9 $^{\mathrm{AC}}$ 位相空間 X について，次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) X はコンパクトかつ距離づけ可能である．

(2) X は第 2 可算かつコンパクト・ハウスドルフである．

(3) 閉うめこみ $X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ が存在する． □

証明 (1)⇒(2)$^{\mathrm{AC}}$: 命題 6.3.9 より X は全有界であり，命題 8.4.3.3.$^{\mathrm{AC}}$ より，X は可分である．系 8.4.4(1)⇒(2) より，X は第 2 可算である．

(2)⇒(3)$^{\mathrm{AC}}$: 系 6.5.6 より，X は正規である．定理 8.4.7(2)⇒(3)$^{\mathrm{AC}}$ より，うめこみ $f\colon X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ が存在する．系 6.5.2.2. より，f は閉うめこみである．最大値の定理（命題 6.3.3）より，実数列 $(a_n), (b_n)$ で，任意の n に対し $a_n < b_n$ であり，$f(X) \subset \prod_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ をみたすものが存在する．$\prod_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ は $[0,1]^{\mathbb{N}}$ と同相である．

(3)⇒(1): 2 進小数展開が定める連続全射 $e_2\colon 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$（例題 5.3.8）の積 $e_2^{\mathbb{N}}\colon 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ も，連続全射である．$2^{\mathbb{N}}$ はコンパクトであり，$2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ も $2^{\mathbb{N}}$ と同相だからコンパクトである．よって，系 6.4.3 より，無限積 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ もコンパクトである．X はその閉部分空間と同相だから，系 6.4.2.1. より，コンパクトである．

命題 8.4.6 より，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は距離づけ可能である．X は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の部分空間と同相だから，距離づけ可能である． ■

まとめ

・開集合系の基底と開近傍系の基本系について，可算性の条件を定義した．

・距離空間が稠密な可算部分集合を含めば，第 2 可算であり，$\mathbb{R}$ の可算積空間にうめこめる．

・第 2 可算な正規空間の位相は，距離で定義される．

・コンパクト距離空間は，閉区間の可算積の閉部分空間と同相である．

問題

A 8.4.1　X を位相空間とし，$\mathcal{O}$ を X の位相とする．

1. X が第 2 可算ならば，$\mathrm{Card}\ \mathcal{O} \leq \aleph$ であることを示せ．
2. X がハウスドルフならば，$\mathrm{Card}\ X \leq \mathrm{Card}\ \mathcal{O}$ であることを示せ．

A 8.4.2 AC　X を可分な距離空間とする．

1. X の部分空間は可分であることを示せ．
2. X の離散部分集合は可算であることを示せ．

B 8.4.3　U を $\mathbb{R}$ の開集合とする．U は，可算個の開区間の無縁和であることを示せ．

B 8.4.4　$C([0,1])$ の部分集合 A を，次で定める．

$$A = \left\{ f \in C([0,1]) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ のグラフは有限個の線分の合併で，各線分の} \\ \text{端点の } x \text{ 座標，} y \text{ 座標はともに有理数} \end{array} \right\}.$$

1. 集合 A は可算集合であることを示せ．
2. 一様収束位相に関して，A は $C([0,1])$ で稠密であることを示せ．

B 8.4.5　1. l^∞ の部分空間 $C = \{(a_n) \in l^\infty \mid (a_n)$ は収束する $\}$ は，閉部分空間であり，可分であることを示せ．

2. $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset l^\infty$ は離散部分空間であることを示せ．
3. l^∞ は可分でないことを示せ．
4. 包含写像 $l^\infty \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ はうめこみではないことを示せ．

B 8.4.6　X を局所コンパクト空間とする．

1. $\mathcal{U}$ を X の開集合系の基底とする．$\mathcal{U}' = \{U \in \mathcal{U} \mid U$ は相対コンパクト $\}$ とおくと，$\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ も X の開集合系の基底であることを示せ．

2. Y を X の 1 点コンパクト化とし，$b \in Y$ を無限遠点とする．次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) X は σ コンパクトである．

(2) b の開近傍の基本系で，可算集合であるものが存在する．

3. 次の条件 (1)–(5) は同値であることを示せ．

(1) X は第 2 可算である．

(2) X は可分かつ距離づけ可能である．

(3) X は σ コンパクトかつ距離づけ可能である．

(4) X は σ コンパクトであり，X の任意の点 x に対し，x の開近傍で第 2 可算であるものが存在する．

(5) X の 1 点コンパクト化は，第 2 可算である．

BP 8.4.7 AC　I を可算集合とし，$(X_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とする．任意の $i \in I$ に対し，X_i が距離づけ可能ならば，積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ も距離づけ可能であることを示せ．

C 8.4.8　1. X をコンパクト空間，Y をハウスドルフ空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続全射とする．X が第 2 可算なら，Y も第 2 可算であることを示せ．

2. ハウスドルフ空間 X に対し，次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) X はコンパクトかつ距離づけ可能である．

(2) 連続全射 $2^{\mathbb{N}} \to X$ が存在する．

C 8.4.9　$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times 2 \mid (x, z) \neq (0, 1)\}$ とおき，写像の族 $(j_b\colon \mathbb{R}^2 \to X)_{b\in\mathbb{R}}$ を，

$$j_b(x, y) = \begin{cases} (x, xy + b, 1) & x \neq 0 \text{ のとき}, \\ (y, b, 0) & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める．X を，$(j_b\colon \mathbb{R}^2 \to X)_{b\in\mathbb{R}}$ による像位相により，位相空間と考える．$f\colon X \to \mathbb{R}^2$ を $f(x, y, z) = (xz, y)$ で定める．

1. $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ は連続であることを示せ．

2. $b \in \mathbb{R}$ ならば，$j_b\colon \mathbb{R}^2 \to X$ は開うめこみであることを示せ．$b \in \mathbb{R}$ に対し $U_b = j_b(\mathbb{R}^2)$ とおくと，$(U_b)_{b\in\mathbb{R}}$ は X の開被覆であることも示せ．

3. $A = \{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{Q}, x \neq 0\} \subset X$ は，稠密であることを示せ．

4. 部分空間 $B = \{(0, b, 0) \mid b \in \mathbb{R}\} \subset X$ は，離散であることを示せ．

5. X はハウスドルフであることを示せ．

6. X は第 1 可算であることを示せ．

7. X は第 2 可算でないことを示せ．

8. X は局所コンパクトであることを示せ．

9. X は σ コンパクトでないことを示せ．

10. X は距離づけ可能でないことを示せ．

C 8.4.10 AC **（ティーツェの拡張定理）**　X を正規空間とし，A を閉部分集合とする．

1. 制限写像 $B(X) \to B(A)$ は全射であり，任意の $g \in B(A)$ に対し，$f|_A = g$ かつ $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$ をみたす $f \in B(X)$ が存在することを示せ．（ヒント：ウリゾンの補題と問題 8.3.7 を使う．）

2. 制限写像 $C(X) \to C(A)$ は全射であることを示せ．

C 8.4.11 AC　X を正規空間とする．次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ．

(1) X はコンパクトかつ距離づけ可能である．

(2) $B(X)$ は一様収束位相に関して，可分である．

8.5　応用：陰関数定理と常微分方程式の解の存在定理 *

縮小写像の応用として，陰関数定理と，常微分方程式の解の存在定理

を証明する．この節では，ベクトル $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ と行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \in M(m, \mathbb{R})$ のノルムを，それぞれ $|a| = \max(|a_1|, \ldots, |a_m|)$，$|A| = \max_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq m} |a_{ij}|$ で定める．$|Aa| \leq m|A||a|$ がなりたつ．U を $\mathbb{R}^{n+m}$ の開集合とする．連続微分可能な写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ に対し，各成分 $f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ の偏導関数を成分とする行列値連続写像 $f_y = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)\colon U \to M(m, \mathbb{R})$ が定義される．

定理 8.5.1　$n, m \geq 1$ を自然数とする．U を $\mathbb{R}^{n+m}$ の開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ を連続微分可能な写像とする．$a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ とし，$(a, b) \in U$ とする．行列 $A = f_y(a, b) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b)\right) \in M(m, \mathbb{R})$ は可逆であると仮定する．

このとき，実数 $r > 0$ と連続関数 $g\colon U_r(a) \to \mathbb{R}^m$ で，次の条件 (1) と (2) をみたすものが存在する．

(1) $b = g(a)$ である．

(2) 任意の $x \in U_r(a)$ に対し，$(x, g(x)) \in U$ かつ $f(x, g(x)) = f(a, b)$ である．　□

g は連続微分可能であり，一意性もなりたつが，ここではそれは証明しない．

証明　連続写像 $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ を

$$F(x, y) = y - A^{-1} \cdot (f(x, y) - f(a, b))$$

で定める．F は連続微分可能であり，$F(a, b) = b$, $F_y(a, b) = 1 - A^{-1} \cdot f_y(a, b) = 0$ である．実数 $r_1 > 0$ と $r_2 > 0$ を，次の条件 (i)–(iii) をみたすものとする．

(i)　$U_{r_1}(a) \times \overline{U_{r_2}(b)} \subset U$ である．

(ii)　$x \in U_{r_1}(a)$ ならば，$|F(x, b) - b| \leq \frac{r_2}{2}$ である．

(iii)　$(x, y) \in U_{r_1}(a) \times \overline{U_{r_2}(b)}$ ならば，$|F_y(x, y)| \leq \frac{1}{2m}$ である．

(iii) と平均値の定理より，

(iv) $x \in U_{r_1}(a)$ かつ $y, z \in \overline{U_{r_2}(b)}$ ならば，$|F(x,y) - F(x,z)| \le \frac{1}{2}|y - z|$ である．

がなりたつ．よって，(ii) より，$(x,y) \in U_{r_1}(a) \times \overline{U_{r_2}(b)}$ ならば $|F(x,y) - b| \le |F(x,y) - F(x,b)| + |F(x,b) - b| \le r_2$ である．したがって，F は，$U_{r_1}(a) \times \overline{U_{r_2}(b)}$ を $\overline{U_{r_2}(b)}$ にうつす．

有界連続関数の空間 $B(U_{r_1}(a), \mathbb{R}^m) = B(U_{r_1}(a))^m$ のノルムを，$f = (f_1, \ldots, f_m)$ に対し，$\|f\| = \max(\|f_1\|_\infty, \ldots, \|f_m\|_\infty)$ で定める．系 8.3.8 より，$B(U_{r_1}(a), \mathbb{R}^m)$ は完備である．$X = \{g \in C(U_{r_1}(a), \overline{U_{r_2}(b)}) \mid g(a) = b\}$ を，$B(U_{r_1}(a), \mathbb{R}^m)$ の部分空間と考える．X は $B(U_{r_1}(a), \mathbb{R}^m)$ の閉部分空間だから，命題 8.3.6 より，完備である．

$g \in X$ とすると，$x \in U_{r_1}(a)$ に対し $F(x, g(x)) \in \overline{U_{r_2}(b)}$ かつ $F(a, g(a)) = b$ である．よって，$x \in U_{r_1}(a)$ を $F(x, g(x)) \in \overline{U_{r_2}(b)}$ にうつす写像 $U_{r_1}(a) \to \overline{U_{r_2}(b)}$ は，X の元である．この写像を $F_*(g) \in X$ とおいて，写像 $F_*\colon X \to X$ を定める．$x \in U_{r_1}(a)$ に対し，$F_*(g)(x) = F(x, g(x))$ である．

$F_*\colon X \to X$ が縮小写像であることを示す．$g, h \in X$ とする．$x \in U_r(a)$ とすると，(iv) より，$|F(x, g(x)) - F(x, h(x))| \le \frac{1}{2}|g(x) - h(x)|$ である．したがって，$\|F_*(g) - F_*(h)\| \le \frac{1}{2}\|g - h\|$ である．

定値写像 b は X の元だから，X は空でない．よって，命題 8.3.12 より，$F_*(g) = g$ をみたす $g \in X$ がただ 1 つ存在する．$g \in X$ だから，$g(a) = b$ である．$x \in U_r(a)$ に対し，$F_*(g)(x) = F(x, g(x)) = g(x) - A^{-1} \cdot (f(x, g(x)) - f(a,b))$ が $g(x)$ に等しいから，$A^{-1} \cdot (f(x, g(x)) - f(a,b)) = 0$ であり，$f(x, g(x)) = f(a,b)$ である． ■

よりみち 100 陰関数定理は，微分可能多様体の定義や，その間の写像を調べるときに，重要である．次の，常微分方程式の解の存在定理も，多様体上のベクトル場を積分するときに，使われる．

定理 8.5.2 U を $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{R}^n$ を連続関数とする．$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^n$ とし，$(a,b) \in U$ とする．$M > 0$ を実数とし，任意の $(t,x), (t,y) \in U$ に対し

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le M|x - y| \tag{8.4}$$

がなりたつとする．

このとき，実数 $r>0$ と微分可能な関数 $v\colon (a-r,a+r)\to\mathbb{R}^n$ で，次の条件 (1) と (2) をみたすものが存在する．

(1) $v(a)=b$ である．

(2) 任意の $t\in(a-r,a+r)$ に対し，$(t,v(t))\in U$ かつ $v'(t)=f(t,v(t))$ である． □

証明　実数 $r_1>r>0, r_2>0$ と $M'>0$ を，次の条件

(i)　$U_{r_1}(a)\times\overline{U_{r_2}(b)}\subset U$ である．

(ii)　$t\in U_{r_1}(a), x\in\overline{U_{r_2}(b)}$ ならば，$|f(t,x)|\leq M'$ である．

(iii)　$Mr<1$ かつ $M'r\leq r_2$ である．

をみたすものとする．

定理 8.5.1 の証明と同様に，$B(U_r(a),\mathbb{R}^n) = B(U_{r_1}(a))^n$ のノルムを，$f=(f_1,\ldots,f_n)$ に対し，$\|f\|=\max(\|f_1\|_\infty,\ldots,\|f_n\|_\infty)$ で定める．部分空間 $X=\{v\in C(U_r(a),\overline{U_{r_2}(b)})\mid v(a)=b\}\subset B(U_r(a),\mathbb{R}^n)$ は，完備である．$v\in X$ と $t\in U_r(a)$ に対し，積分 $\int_a^t f(t,v(t))dt$ を，成分ごとに $\int_a^t f(t,v(t))dt = \left(\int_a^t f_1(t,v(t))dt,\ldots,\int_a^t f_n(t,v(t))dt\right)$ で定める．(ii) と (iii) より，$\|\int_a^t f(t,v(t))dt\|\leq M'|t-a|<M'r\leq r_2$ である．したがって，$t\in U_r(a)$ を $b+\int_a^t f(t,v(t))dt\in\overline{U_{r_2}(b)}$ にうつす写像 $U_r(a)\to\overline{U_{r_2}(b)}$ は，X の元である．この写像を $F(v)\in X$ とおいて，写像 $F\colon X\to X$ を定める．$v\in X$ に対し，

$$F(v)(t)=b+\int_a^t f(t,v(t))dt$$

である．

$F\colon X\to X$ が縮小写像であることを示す．$v_1,v_2\in X$ とする．式 (8.4) より，$t\in U_r(a)$ に対し，

$$|F(v_1)(t)-F(v_2)(t)| = \left|\int_a^t f(t,v_1(t))-f(t,v_2(t))dt\right|$$
$$\leq M\int_a^t |v_1(t)-v_2(t)|dt \leq M\cdot\|v_1-v_2\|\cdot|t-a|\leq Mr\cdot\|v_1-v_2\|$$

である．よって，$\|F(v_1)-F(v_2)\|\leq Mr\cdot\|v_1-v_2\|$ である．(iii) より，$0<Mr<1$ だから，$F\colon X\to X$ は縮小写像である．

定値写像 b は X の元だから，X は空でない．よって，命題 8.3.12 より，$F(v) = v$ をみたす $v \in X$ がただ 1 つ存在する．$t \in U_r(a)$ に対し，$v(t) = F(v)(t) = b + \int_a^t f(t, v(t))dt$ だから，$v(a) = b$ であり，$v'(t) = f(t, v(t))$ である．■

> **まとめ**
>
> ・写像の空間の縮小写像の不動点として，陰関数や常微分方程式の解の存在が示される．

問題の略解

第1章

1.1.1　1. $\exists x(x \in X \wedge \forall y(y \in X \Rightarrow x = y))$. X の元がただ 1 つ存在するとは，X の元が存在し，さらに，ほかの元があったとすると，それははじめに考えた元に等しいということである．これを形式化すればよい．

2. $X = Y \Rightarrow \forall x(x \in X \Rightarrow x \in Y)$. 集合 X の任意の元 x は Y の元であるというのは，任意の x に対し $x \in X$ ならば $x \in Y$ ということである．これを形式化すればよい．

3. $\neg\exists X \exists x \exists y(x \in X \wedge y \in X \wedge x \neq y)$. 集合 X が 2 個以上の元を含むということは，X の元で相異なるもの x, y が存在するということである．そのような X の存在を否定すればよい．

1.2.1　1. $A \cup B$ は図 A.1 のよこ線部分だから，それが C の部分集合であるための条件は，斜線部分が空であることである．右下がりの斜線部分が空であるとは，$A \subset C$ ということであり，左下がりの斜線部分が空であるとは，$B \subset C$ ということである．

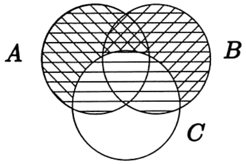


図 **A.1**　$A \cup B \subset C$

2. $C \subset A$ ならば $C \subset A \subset A \cup B$ であり，$C \subset B$ ならば $C \subset B \subset A \cup B$ である．

3. $A = \{0\}, B = \{1\}, C = \{0, 1\}$ は反例である．

1.2.2　(1) は，$X = A \cup B$ かつ $A \cap B = \emptyset$ ということである．$X = A \cup B$ は，$\forall x \in X(x \in A \vee x \in B)$ と同値であり，$\forall x \in X(x \notin A \Rightarrow x \in B)$ とも同値である．よって，これは $X \setminus A \subset B$ と同値である．

$A \cap B = \emptyset$ は，$\neg\exists x \in X(x \in A \wedge x \in B)$ と同値であり，$\forall x \in X(x \notin A \vee x \notin B)$ とも同値である．これは，$\forall x \in X(x \in B \Rightarrow x \notin A)$ と同値であり，$B \subset X \setminus A$ と同値である．よって，(1) は (2) と同値である．

1.2.3　包含関係の否定 $A \not\subset B$ は，図 A.2 の左の図の斜線部分が空でないことを表わしている．一方，右の図のよこ線部分は $X \setminus B$，たて線部分は A をそれぞれ表わしている．

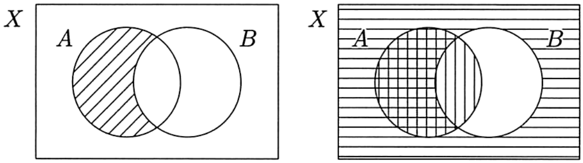


図 A.2　$A \not\subset B$ と $A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$

$A \not\subset B$ とは，$\neg(\forall x \in X(P \Rightarrow Q))$ のことであり，$A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$ とは，$\exists x \in X(P \wedge \neg Q)$ のことである．

1.2.4　1. $A \in X$ として矛盾を導く．$A \in X$ とすると，$A \in A$ か $A \in X \setminus A$ のどちらかがなりたつ．$A \in A$ とすると，A の定義により $A \notin A$ である．よって，$A \in X \setminus A$ であるが，このとき，A の定義により $A \in A$ である．これは矛盾である．

2. すべての集合を元として含む集合が存在したとして，それを X とおく．1. より，集合 $A = \{x \in X \mid x \notin x\}$ は X の元でないから，これは，X がすべての集合を元として含むことに矛盾する．

1.3.1　1. $\exists X \exists x\ x \in X$ と $\exists Y((\forall x\ x \notin X) \Rightarrow X \neq Y)$ のどちらも答である．1 つめの式では，空集合ではない集合を，少なくとも 1 つ元を含む集合と考え，その存在を表わしている．2 つめの式では，空集合を X で表わし，X とは異なる集合の存在を表わしている．

2. $\exists X(\neg \exists Y\ Y \subset X)$ と $\exists X(\forall x(x \in Y \Leftrightarrow x \subset X) \Rightarrow \forall x(x \notin Y))$ のどちらも答である．1 つめの式では，X の巾集合が空集合であるとは X の部分集合が存在しないことであると考え，そのような集合 X の存在を表わしている．2 つめの式では，X の巾集合を Y で表わし，Y が空集合となるような X の存在を表わしている．

1.3.2　1. $A = B$ なら $I(A) = I(B)$ である．$I(A) = I(B)$ とすると，$A \in I(A) = I(B)$ だから $B \subset A$ であり，同様に $A \subset B$ である．

2. $C \in P(X)$ に対し，$C \in I(A \cup B)$ と $A \cup B \subset C$ は同値である．$C \in I(A) \cap I(B)$ と $A \subset C \wedge B \subset C$ は同値である．よって，問題 1.2.1.1. よりしたがう．

1.3.3　1. $X \subset Y$ とすると，$x \subset X$ ならば $x \subset Y$ である．よって，$x \in P(X)$ ならば $x \in P(Y)$ である．

$P(X) \subset P(Y)$ とすると，$X \in P(X) \subset P(Y)$ であり，$X \subset Y$ である．

2. 1. より，$1 = P(0) \subsetneqq 2 = P(1)$ は，$0 = \emptyset \subsetneqq 1 = P(\emptyset)$ と同値である．$\emptyset \in P(\emptyset)$ だから，$\emptyset \subsetneqq P(\emptyset)$ である．

3. $P(2)=\{0,1,2,\{1\}\}$ で $3=\{0,1,2\}$ だから，$P(2)\setminus 3$ の元は $\{1\}$ だけである．

4. n に関する帰納法で示す．$0=\emptyset$ だから，$0\subset P(0)$ である．$n\subset n$ だから，$n\in P(n)$ であり，$\{n\}\subset P(n)$ である．これと，帰納法の仮定 $n\subset P(n)$ より，$n+1=n\cup\{n\}\subset P(n)$ である．$n\subset n+1$ だから，1. より，$n+1\subset P(n)\subset P(n+1)$ である．

1.3.4 1. $\{a\}\subset A\subset\{a,b\}$ をみたす集合 A は，$\{a\}$ と $\{a,b\}$ だけである．

2. (1)⇒(2): $x=a$ なら，$x\in\{a\}$ かつ $x\in\{a,b\}$ である．

(2)⇒(1): $\{a\}\cap\{a,b\}=\{a\}$ の元は a だけである．

3. (1)⇒(2): $y=b$ とする．$a=b$ なら，(a,b) の元は $\{a\}$ ただ 1 つであり，$y=a\in\{a\}$ である．$a\neq b$ なら，$y\notin\{a\}$ かつ $y\in\{a,b\}$ である．

(2)⇒(1): $y\in z\in(a,b)$ をみたす z が存在するならば，$y\in\{a\}\cup\{a,b\}=\{a,b\}$ だから，$y=a$ または $y=b$ である．$a\neq b$ とすると，a は $\{a\}\neq\{a,b\}$ の両方の元だから，(2) の条件をみたさない．よって，(2) の条件をみたすものは，$y=b$ だけである．

4. (1)⇒(2) は明らかである．

(2)⇒(1): 2. の (2)⇒(1) より，$x=a$ は，任意の $z\in(a,b)=(x,y)$ に対し $x\in z$ をみたす，ただ 1 つの元である．同様に，3. の (2)⇒(1) より，$y=b$ は，$y\in z$ をみたす元 $z\in(a,b)$ がただ 1 つ存在する，ただ 1 つの元である．

1.3.5 1. (1)⇒(2) の対偶を示す．$x\in X, y\in Y$ なら $(x,y)\in X\times Y$ である．

(2)⇒(1): $X=\emptyset$ ならば，$z=(x,y)$ となる $x\in X$ は存在しない．$Y=\emptyset$ のときも，同様である．

2. (1) を，「$A=X$ かつ $B=Y$ であるかまたは，X と Y のどちらかが空集合である」と修正する．

(1)⇒(2): $A=X$ かつ $B=Y$ ならば，$A\times B=X\times Y$ である．X と Y のどちらかが空集合ならば，$A\times B=X\times Y=\emptyset$ である．

(2)⇒(1): X と Y のどちらも空集合でないとして，$A\times B=X\times Y$ から $A=X$ かつ $B=Y$ を導けばよい．$x\in X$ とすると，$y\in Y$ が存在するから，$(x,y)\in X\times Y=A\times B$ である．よって，$(x,y)=(a,b)$ をみたす $a\in A, b\in B$ があり，$x=a\in A$ である．したがって，$A=X$ である．同様に $B=Y$ である．

1.4.1 1. $(A\cup A)\setminus(A\cap A)=\emptyset\in N$ である．$(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(B\cup A)\setminus(B\cap A)$ である．$(A\cup C)\setminus(A\cap C)\subset(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)=((A\cup B)\setminus(A\cap B))\cup((B\cup C)\setminus(B\cap C))$ である．

2. N.

3. $P(X)$ の同値類は，$\{A, A\cup\{2\}\}$ $(A\in P(\{0,1\}))$ だから，4 個である．

1.4.2 1. $(0,0)=0(1,0)\sim(1,0)$ だが，$(1,0)=a(0,0)$ をみたす実数 a は存在しない．

2. $x=1\cdot x$ である．$x=ay$ なら $y=a^{-1}x$ である．$x=ay, y=bz$ なら $x=(ab)z$

である．

3. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0, y\neq 0\}$ と $\{(0,0)\}$ の 2 つである．

1.4.3 1. $\emptyset\cap\emptyset=\emptyset$ である．

2. $A\cap B\neq\emptyset$ ならば，$B\cap A=A\cap B\neq\emptyset$ である．

3. X の元の個数が 1 以下ということである．$x,y\in X$ かつ $x\neq y$ とすると，$\{x\}\sim\{x,y\}$ かつ $\{x,y\}\sim\{y\}$ だが，$\{x\}\sim\{y\}$ ではない．$X=\{x\}$ のときは，$A\sim B$ とは $A=B=X$ のことだから，推移律がなりたつ．$X=\emptyset$ のときは，$A\sim B$ はなりたたないから，推移律がなりたつ．

1.4.4 R_A が，反射律と対称律と推移律をみたすことを示せばよい．$x,y\in X$ が R_A をみたすことを，$x\sim_A y$ で表わす．$x\in X$ とすると，$n=0$ とおけば，$x\sim_A x$ である．よって，反射律がなりたつ．$x\sim_A y$ とする．$x=x_0,x_1,\ldots,x_n=y\in X$ が，すべての $i=1,\ldots,n$ に対し，$(x_{i-1},x_i)\in A\cup {}^tA$ をみたすとすると，$y_i=x_{n-i}$ とおけば，$y=y_0,y_1,\ldots,y_n=x\in X$ であり，すべての $i=1,\ldots,n$ に対し，$(y_{i-1},y_i)=(x_{n-i+1},x_{n-i})\in A\cup {}^tA$ である．よって，対称律もなりたつ．

推移律を示す．$x\sim_A y, y\sim_A z$ とする．$x=x_0,x_1,\ldots,x_n=y, y=y_0,y_1,\ldots,y_m=z\in X$ が，すべての $i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m$ に対し，$(x_{i-1},x_i),(y_{j-1},y_j)\in A\cup {}^tA$ をみたすとする．$j=1,\ldots,m$ に対し，$x_{n+j}=y_j$ とおけば，$x=x_0,x_1,\ldots,x_{n+m}=z\in X$ であり，すべての $i=1,\ldots,n+m$ に対し，$(x_{i-1},x_i)\in A\cup {}^tA$ である．よって，推移律もなりたつ．

1.4.5 1. $x<_1 x$ かつ $y<_2 y$ だから，$(x,y)<_p(x,y)$ である．$(x,y)<_p(x',y')$ かつ $(x',y')<_p(x,y)$ ならば，$x<_1 x'$ かつ $y<_2 y'$ かつ $x'<_1 x$ かつ $y'<_2 y$ だから，$x=x'$ かつ $y=y'$ であり，$(x,y)=(x',y')$ である．$(x,y)<_p(x',y')$ かつ $(x',y')<_p(x'',y'')$ ならば，$x<_1 x'$ かつ $y<_2 y'$ かつ $x'<_1 x''$ かつ $y<_2 y''$ だから，$x<_1 x''$ かつ $y<_2 y''$ であり，$(x,y)<_p(x'',y'')$ である．

2. $x=x$ かつ $y<_2 y$ だから，$(x,y)<_l(x,y)$ である．$(x,y)<_l(x',y')$ かつ $(x',y')<_l(x,y)$ とすると，$x<_1 x'$ かつ $x'<_1 x$ だから $x=x'$ である．さらに $y<_2 y'$ かつ $y'<_2 y$ だから，$y=y'$ であり，$(x,y)=(x',y')$ である．$(x,y)<_l(x',y')$ かつ $(x',y')<_l(x'',y'')$ ならば，$x<_1 x'$ かつ $x'<_1 x''$ だから，$x<_1 x''$ である．さらに，$x=x''$ ならば，$x=x'=x''$ だから $y<_2 y'$ かつ $y'<_2 y''$ である．よって，$y<_2 y''$ であり，$(x,y)<_l(x'',y'')$ である．

第2章

2.1.1 1. (1) は写像 $\log\colon\{y\in\mathbb{R}\mid y>0\}\to\mathbb{R}$ を定める．元の対応は $y\mapsto\log y$ である．

$(e^x)'=e^x>0$ だから，e^x は単調増加である．$\lim_{x\to-\infty}e^x=0, \lim_{x\to\infty}e^x=+\infty$ だから，

中間値の定理より，任意の実数 $y>0$ に対し，$y=e^x$ をみたす実数 x が，ただ 1 つ存在する．

(2) は写像でない．$a>0$ なら $b^2=a$ をみたす実数 b は $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ の 2 つある．また，$a<0$ なら $b^2=a$ をみたす実数 b は存在しない．

(3) も写像でない．$x=0$ に対しては，$xy=1$ をみたす実数は存在しない．

2.　(2) 定義域と行き先をどちらも $\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$ に変更すれば，写像 $\sqrt{\ }\colon \{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}\to\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$ を定める．元の対応は $a\mapsto\sqrt{a}$ である．行き先を $\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 0\}$ に変更してもよい．

(3) 定義域を $\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}$ に変更すれば，写像 ${}^{-1}\colon \{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}\to\mathbb{R}$ を定める．元の対応は $x\mapsto x^{-1}$ である．

2.1.2　1. $A\times\{1\}\cup(X\setminus A)\times\{0\}\subset X\times 2$ である．

2. $\chi_{X\setminus A}=1-\chi_A$，$\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B$，$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B$ である．

2.1.3　1. $(x,y)\in\Delta_X$ とは，$x=y$ ということである．したがって，$x\in X$ なら $\chi_{\Delta_X}(x,x)=1$ であり，$x\neq y$ なら $\chi_{\Delta_X}(x,y)=0$ である．

2. $\{(x,y,z)\in X\times X\times X\mid x=y=z\}$ である．

2.1.4　(1)⇒(2): $a=c, b=d$ なら $a\cos+b\sin=c\cos+d\sin$ である．

(2)⇒(1): 関数 $f=a\cos+b\sin$ と $g=c\cos+d\sin$ が等しければ，$f(0)=a$ と $g(0)=c$ は等しく，$f(\frac{\pi}{2})=b$ と $g(\frac{\pi}{2})=d$ も等しい．

2.1.5　X が空集合でなければ，空集合への写像 $X\to\emptyset$ は存在しない．よって，$X\neq\emptyset$ ならば $\mathrm{Map}(X,\emptyset)=\emptyset$ である．X が空集合ならば，空集合への写像は恒等写像ただ 1 つである．よって，$\mathrm{Map}(\emptyset,\emptyset)=\{\mathrm{id}_\emptyset\}$ である．

2.2.1　1. X の元の個数が 1 以下であることである．X の元の個数が 1 以下なら，$\mathrm{Map}(X,X)=\{\mathrm{id}_X\}$ だから，$F=G$ である．$a,b\in X, a\neq b$ とする．$a,b\colon X\to X$ で定値写像を表わすと，$F(a,b)=a\circ b=a\neq b=b\circ a=G(a,b)$ だから，$F\neq G$ である．

2. $(h,g,f)\in\mathrm{Map}(Y,Z)\times\mathrm{Map}(X,Y)\times\mathrm{Map}(W,X)$ に対し，左回りの合成による値は，$(h\circ g)\circ f$ であり，右回りの合成による値は，$h\circ(g\circ f)$ である．よって，写像の合成の結合則よりしたがう．

2.3.1　$f^2=\mathrm{id}_X$ ならば，f は f の逆写像であり，f は可逆である．

2.3.2　1.　逆写像は，X の元 x に対し定値写像 $x\colon 1\to X$ を対応させる写像 $X\to\mathrm{Map}(1,X)$ である．

2. (1)⇒(2) ⇒(3) と (1)⇒(4) ⇒(5) は明らかである．

(3)⇒(1): $a\in X$ とし g を $\{a\}\subset X$ の特性関数とすれば，(3) より，$f(x)=a$ と $x=a$ は同値である．$a\in X$ は任意だから，$f=\mathrm{id}_X$ である．

(5)⇒(1): 図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Map}(1,X) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Map}(1,X) \\
{\scriptstyle \mathrm{ev}_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_0} \\
X & \xrightarrow{f} & X
\end{array}$$

は可換である．(5) なら，$f_*\colon \mathrm{Map}(1,X) \to \mathrm{Map}(1,X)$ は恒等写像である．よって，1. より，f も恒等写像である．

2.3.3 (1)⇒(2): $g\colon Y \to X$ を f の逆写像とすると，$g^*\colon \mathrm{Map}(X,Z) \to \mathrm{Map}(Y,Z)$ は f^* の逆写像である．

(2)⇒(1): $Z = X$ とすれば，$\mathrm{id}_X = f^*(g) = g \circ f$ をみたす $g\colon Y \to X$ がただ 1 つ存在する．$f \circ g, \mathrm{id}_Y \in \mathrm{Map}(Y,Y)$ は，$f^*(f\circ g) = f \circ g \circ f = f \circ \mathrm{id}_X = f = f^*(\mathrm{id}_Y)$ をみたすから，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ である．よって，$g\colon Y \to X$ は f の逆写像である．

2.4.1 1. $a < s < t < b$ ならば $[s,t] \subset (a,b)$ だから，$\bigcup_{a<s<t<b}[s,t] \subset (a,b)$ である．$x \in (a,b)$ ならば，$s = \frac{a+x}{2}, t = \frac{b+x}{2}$ とおけば $a < s < x < t < b$ である．よって，$\bigcup_{a<s<t<b}[s,t] \supset (a,b)$ である．

2. $s < a < b < t$ ならば $[a,b] \subset (s,t)$ だから，$[a,b] \subset \bigcap_{s<a<b<t}(s,t)$ である．任意の $s < a < b < t$ に対し，$x \in (s,t)$ とする．$x < a$ だったとすると，$x \in (x, b+1)$ となって矛盾だから，$x \geq a$ である．同様に，$x \leq b$ だから，$\bigcap_{s<a<b<t}(s,t) \subset [a,b]$ である．

3. $I = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s < a$ かつ $b < t\}$．対 $(s,t) \in I$ の値は，開区間 $(s,t) \in P(\mathbb{R})$.

2.4.2 1. $x \in X$ に対し，$(f_1 \times f_2) \circ \delta(x) = (f_1 \times f_2)(x,x) = (f_1(x), f_2(x)) = (f_1, f_2)(x)$ である．

2. $x \in X$ に対し，$\delta(x) = (x,x) = (\mathrm{id}_X(x), \mathrm{id}_X(x)) = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)(x)$ である．

2.4.3 $t \in T$ に対し，$(\prod_{i\in I} f_i \circ \delta)(t) = \prod_{i\in I} f_i((t)_{i\in I}) = (f_i(t))_{i\in I} = (f_i)(t)$ である．

2.4.4 1. 命題 2.4.2 を適用すればよい．

2. 直和の普遍性である．

3. 集合族 (X,Y) に対する可逆写像 F は，可逆写像 $(X\times Y)^Z \to X^Z \times Y^Z$ を定める．集合族 (Y,Z) に対する可逆写像 G は，可逆写像 $X^{Y \amalg Z} \to X^Y \times X^Z$ を定める．集合族 $(Y)_{z\in Z}$ に対する可逆写像 G は，可逆写像 $X^{Y\times Z} \to (X^Y)^Z$ を定める．

2.5.1 1. $\mathrm{pr}_1(A) = X$ は，任意の $x \in X$ に対し，$x = \mathrm{pr}_1(z)$ をみたす $z \in A$ が存在するということである．$x = \mathrm{pr}_1(z)$ だから，$z = (x,y)$ となる $y \in Y$ がある．$z = (x,y) \in A$ だから，x, y は P をみたす．よって，これは $\forall x \in X \exists y \in Y P$ と同値である．

2. $\{y \in Y \mid \mathrm{pr}_2^{-1}(y) \subset A\} \neq \emptyset$ とは，Y の元 y で，$\mathrm{pr}_2^{-1}(y) \subset A$ をみたすものがあるということである．$\mathrm{pr}_2^{-1}(y) = X \times \{y\}$ だから，これは，任意の $x \in X$ に対し x, y は P をみたすということであり，$\exists y \in Y \forall x \in X P$ と同値である．

2.5.2 1. $f(x) = x^2$ とおき，$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ とすれば，$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

であり，$f^{-1}(f(A)) = \mathbb{R} \supsetneqq A$ である．

2. $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ とすれば，$f(A \cap A') = f(\emptyset) = \emptyset$ であり，$f(A) \cap f(A') = f(A') = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ である．

2.5.3 $A \subset X$ なら $f(A) \subset f(X)$ だから，$f_*(P(X)) \subset P(f(X))$ である．$B \subset f(X)$ なら，命題 2.5.2.3.(1) より，$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) = B$ は $f_*(P(X))$ の元である．

2.6.1 1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ で定まる写像 $f \colon X \to \mathbb{R}$.

2. $f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ で定まる写像 $f \colon X \to \mathbb{R}^2$.

2.6.2 1. 商写像 $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の積 $q \times q \colon \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ の標準分解は，可逆写像 $q_2 \colon \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ を定める．写像 $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を，$g(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ で定めると，例 2.6.9 と同様に，g の標準分解は可逆写像 $\bar{g} \colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ を定める．自然な同一視 $(\mathbb{R}^2)^2 = \mathbb{R}^4$ により，$(S^1)^2 = T^2$ である．合成写像 $(\bar{g} \times \bar{g}) \circ q_2 \colon \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to T^2$ は可逆であり，f によってひきおこされる可逆写像と等しい．

2. 写像 $a \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ を $a(z) = (\mathrm{Re}\ z, \mathrm{Im}\ z)$ で定めると，a は可逆であり，可逆写像 $\bar{a} \colon \mathbb{C}/\mathbb{Z}(1) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を定める．可逆写像 $\exp \colon \mathbb{R} \to (0, \infty) = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ と例 2.6.9 の可逆写像 $\bar{f} \colon \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to S^1$ の積写像 $\exp \times \bar{f} \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to (0, \infty) \times S^1$ は可逆である．積 $r(x + y\sqrt{-1})$ が定める写像 $m \colon (0, \infty) \times S^1 \to \mathbb{C}^\times$ も可逆である．合成写像 $m \circ (\exp \times \bar{f}) \circ \bar{a} \colon \mathbb{C}/\mathbb{Z}(1) \to \mathbb{C}^\times$ は exp がひきおこす可逆写像である．

3. 2. の可逆写像 $a \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ の H への制限 b は，可逆写像 $\bar{b} \colon H/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ を定める．1. の可逆写像 $\bar{g} \colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ と，関数 $e^{-2\pi y}$ が定める可逆写像 $e \colon \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} \to \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < r < 1\}$ の積写像 $\bar{g} \times e \colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} \to S^1 \times \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < r < 1\}$ は，可逆である．積は可逆写像 $\mu \colon S^1 \times \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < r < 1\} \to \Delta^*$ を定める．合成写像 $\mu \circ (\bar{g} \times e) \circ \bar{b} \colon H/\mathbb{Z} \to \Delta^*$ は q がひきおこす可逆写像である．

4. $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し，$p(x) = p(y)$ は $x \sim y$ と同値である．$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ なら，$p(x) = \mathbb{R} \cdot x \subset \mathbb{R}^n$ は 1 次元部分空間である．$L \subset \mathbb{R}^n$ が 1 次元部分空間なら，その基底 x は $\mathbb{R} \cdot x = L$ をみたす $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の元である．

2.6.3 1. 反射律と対称律は明らかである．推移律を示す．$x \sim_A y, y \sim_A z$ とする．$x = y$ または $y = z$ なら，$x \sim_A z$ である．$x \neq y \neq z$ なら，$x, y, z \in A$ であり $x \sim_A z$ である．

2. $x \in A$ なら $q(x) = A \in X/{\sim_A}$ であり，$x \in X \setminus A$ なら $q(x) = \{x\} \in X/{\sim_A}$ である．よって，$(X/{\sim_A}) \setminus \{A\}$ は $X \setminus A$ の相等関係による商集合 $(X \setminus A)/=$ であり，q の $X \setminus A$ への制限 $q|_{X \setminus A}$ は商写像 $X \setminus A \to (X \setminus A)/=$ に等しいから可逆である．

2.6.4 商写像 $q \colon X \to X/R_f$ の制限 $q|_{f(X)} \colon f(X) \to X/R_f$ が，f がひきおこす可逆写像 $\bar{f} \colon X/R_f \to f(X)$ の逆写像であることを示せばよい．$\bar{f} \circ q|_{f(X)} = f|_{f(X)}$ であり，$f^2 = f$ だから，$f|_{f(X)} = \mathrm{id}_{f(X)}$ である．$\bar{f} \circ q|_{f(X)} = \mathrm{id}_{f(X)}$ の両辺に，左から $\bar{f}^{-1}$ を

合成すれば，$q|_{f(X)} = \bar{f}^{-1}$ である．

2.6.5 1. C が同値関係 $\sim$ のグラフであるとする．$x, x' \in X$ に対し $f(x) \sim f(x')$ という関係も同値関係である．この関係のグラフは $(f \times f)^{-1}(C)$ である．

2. 1. より，$(f \times f)^{-1}(C)$ は $g(f(x)) = g(f(x'))$ という関係のグラフである．この関係は，合成写像 $g \circ f \colon X \to Z$ が定める同値関係である．

2.6.6 1. $q \colon X \to P(X)$ を $\mathcal{Q}$ の元とする．$A \in q(X) \subset P(X)$ に対し $A = q^{-1}(A)$ だから，命題 2.6.1.3. より，$(A)_{A \in q(X)}$ は X の分割である．よって，$q(X) \in \mathcal{P}$ である．

$F \colon \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ の逆写像 $E \colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ を定める．$P \subset P(X)$ を $\mathcal{P}$ の元とする．写像 $q_P \colon X \to P(X)$ を，$x \in X$ を x を含むただ 1 つの P の元 A にうつす写像とすると，$q_P \in \mathcal{Q}$ である．P を q_P にうつす写像 $E \colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ は，$F \colon \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ の逆写像であることを示す．

$q \in \mathcal{Q}$ とする．$P = F(q)$ とし，$q = q_P$ を示す．$x \in X$ とすると，$x \in q^{-1}(q(x)) = q(x) \in P \subset P(X)$ だから，$q(x) = q_P(x)$ である．よって，$q = q_P$ である．$P \in \mathcal{P}$ とする．$P = F(q_P) = q_P(X)$ を示す．$A \in P$ ならば，$x \in A$ とすれば $A = q_P(x) \in q_P(X)$ である．$A \in q_P(X)$ ならば，$A = q_P(x)$ となる $x \in X$ があるから，$A \in P$ である．

2. $G \colon \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ の逆写像 $H \colon \mathcal{R} \to \mathcal{Q}$ を定める．$C \in \mathcal{R}$ を同値関係 R のグラフとすると，商写像 $q_C \colon X \to X/R \subset P(X)$ は $\mathcal{Q}$ の元である．C を q_C にうつす写像 $H \colon \mathcal{R} \to \mathcal{Q}$ は，$G \colon \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ の逆写像であることを示す．

$q \in \mathcal{Q}$ とする．$C = C_q$ とし，$q = q_C$ を示す．$x \in X$ とすると，$q_C(x) = \{y \in X \mid q(y) = q(x)\} = q^{-1}(q(x)) = q(x) \subset X$ だから，$q = q_C$ である．$C \in \mathcal{R}$ とする．命題 2.6.5.1. より，商写像 $q_C \colon X \to X/R$ が定める同値関係のグラフ $G(q_C)$ は C に等しい．

3. H の定義より，$q \colon X \to P(X)$ は，商写像 $q \colon X \to X/R$ を定める．このとき，像 $F(q) \subset P(X)$ は X/R である．

2.7.1 逆写像を定義する．$(X_y)_{y \in Y}$ を，Y を添字集合とする X の分割とする．$x \in X$ に対し，$x \in X_y$ をみたすただ 1 つの元 $y \in Y$ を対応させることで，全射 $f \colon X \to Y$ が定まる．$(X_y)_{y \in Y}$ に $f \colon X \to Y$ を対応させる写像は逆写像である．

2.7.2 X を集合とし，$(X_i)_{i \in I}$ を X の空でない部分集合の族とする．$f \colon \coprod_{i \in I} X_i \to I$ を，第 2 射影 $X \times I \to I$ の制限とする．$i \in I$ に対し，逆像 $f^{-1}(i)$ は $X_i \times \{i\}$ である．よって仮定より，$f^{-1}(i) \neq \emptyset$ だから，f は全射である．したがって，命題 2.7.5.2.(1)⇒(2) より，$f \circ g = \mathrm{id}_I$ をみたす写像 $g \colon I \to \coprod_{i \in I} X_i \subset X \times I$ が存在する．g と第 1 射影 $X \times I \to X$ の制限との合成を $h \colon I \to X$ とすると，任意の $i \in I$ に対し，$h(i) \in \mathrm{pr}_1(f^{-1}(i)) = X_i$ である．よって，$h \in \prod_{i \in I} X_i \subset \mathrm{Map}(I, X)$ であり，$\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ である．

2.7.3 (1)⇒(3): 命題 2.5.2.2.(3) より，$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ である．$y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ とすると，$y = f(x_1)$ をみたす $x_1 \in A_1$ と $y = f(x_2)$ をみたす $x_2 \in A_2$ がある．f が単射なら，$x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$ であり，$y \in f(A_1 \cap A_2)$ で

ある．

(3)⇒(2): $f^{-1}(f(A)) = A \amalg A'$ とおく．$f(A') \subset f(A)$ だから，$f(A') = f(A) \cap f(A') = f(A \cap A') = f(\emptyset) = \emptyset$ である．よって，$A' = \emptyset$ であり，$f^{-1}(f(A)) = A$ である．

(2)⇒(1): $A = \{x\}$ とすれば，$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(A)) = A = \{x\}$ である．

2.7.4 1. (1)⇒(2), (3): f が単射なら，問題 2.7.3(1)⇒(2) より，$A \subset X$ に対し，$f^*(f_*(A)) = f^{-1}(f(A)) = A$ である．したがってこのとき，$f^* \circ f_* = \mathrm{id}_{P(X)}$ であり，f^* は全射であり，f_* は単射である．

(2)⇒(1): $x \in X$ に対し，$f_*(\{x\}) = \{f(x)\} = f(f^{-1}(f(x))) = f_*(f^{-1}(f(x)))$ である．よって，f_* が単射なら f も単射である．

(3)⇒(1): $x \in X$ とすると，$f^*(B) = \{x\}$ をみたす $B \subset Y$ が存在する．$f(x) \in B$ だから，$f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}(B) = \{x\}$ である．よって，f は単射である．

2. (1)⇒(2), (3): 命題 2.5.2.3.(1) より，$f(X) = Y$ なら $f_* \circ f^* = \mathrm{id}_{P(Y)}$ だから，f_* は全射であり，f^* は単射である．

(2)⇒(1): $Y \in P(Y)$ だから，$f_*(P(X)) = P(Y)$ なら $Y = f(A)$ をみたす $A \subset X$ がある．$Y = f(A) = f(X)$ である．

(3)⇒(1): $f^*(Y \setminus f(X))$ と $f^*(\emptyset)$ は，どちらも $\emptyset$ である．よって，f^* が単射ならば，$Y \setminus f(X) = \emptyset$ であり，$Y = f(X)$ である．

2.7.5 1. (1) ⇒ (2): 補題 2.7.3.2. より，$g \circ f$ が全射なら，g も全射である．よって，さらに g が単射なら，命題 2.7.4 より，g は可逆である．補題 2.7.3.2. より，$f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ も全射である．

(2) ⇒ (1): g が可逆ならば，g は全単射である．さらに f が全射なら，$g \circ f$ も全射である．

2. は同様だから省略する．

2.7.6 1. $x <_R y$ とすると，任意の $z \in L(x)$ に対し，推移律より $z <_R y$ である．このとき，$z \in L(y)$ だから $L(x) \subset L(y)$ である．$L(x) \subset L(y)$ とすると，反射律より $x \in L(x) \subset L(y)$ であり，$x <_R y$ である．

2. $L(x) = L(y)$ ならば，1. より $x <_R y$ かつ $y <_R x$ である．よって，反対称律より，$x = y$ である．

2.7.7 (1)⇒(2): (i) を示す．$i \in I$ に対し，$f_i(X_i) = f_i(X_{ii})$ であり，f_i は単射だから，$X_{ii} = X_i$ である．

(ii) を示す．$f_j(f_{ji}(X_{ijk})) = f_i(X_{ijk}) = f_i(X_{ij} \cap X_{ik}) = f_i(X_{ij}) \cap f_i(X_{ik}) = f_i(X_i) \cap f_j(X_j) \cap f_k(X_k)$ であり，同様に，$f_j(X_{jik}) = f_i(X_i) \cap f_j(X_j) \cap f_k(X_k)$ である．f_j は単射だから，$f_{ji}(X_{ijk}) = X_{jik}$ である．$f_k|_{X_{kij}} \circ f_{ki}|_{X_{ijk}} = f_i|_{X_{ijk}}$ であり，$f_k|_{X_{kij}} \circ f_{kj}|_{X_{jki}} \circ f_{ji}|_{X_{ijk}} = f_j|_{X_{kij}} \circ f_{ji}|_{X_{ijk}} = f_i|_{X_{ijk}}$ である．

(2)⇒(1): 直和 $\coprod_{i \in I} X_i$ を $\widetilde{X}$ とおく．$\widetilde{X} \times \widetilde{X}$ の部分集合 C を，

$$C = \{((x_i, i), (x_j, j)) \in \widetilde{X} \times \widetilde{X} \mid x_i \in X_{ij}, x_j \in X_{ji}, f_{ij}(x_j) = x_i\}$$

で定める．C は同値関係 R のグラフであることを示す．

$i = j = k$ とすると，(i) より，$X_{iii} = X_i$ であり，(ii) より，$f_{ii} \circ f_{ii} = f_{ii}$ である．よって，f_{ii} は $X_i = X_{ii}$ の恒等写像であり，反射律がなりたつ．(ii) より，$X_{iji} = X_{ij}, X_{jii} = X_{ji}, X_{iij} = X_{ij}$ であり，$f_{ji} = f_{ij}^{-1}$ だから，対称律もなりたつ．さらに (ii) より，推移律もなりたつ．

$X = \widetilde{X}/R$ とおき，$f_i \colon X_i \to X$ を，標準単射 $j_i \colon X_i \to \widetilde{X}$ と標準全射 $q \colon \widetilde{X} \to X$ の合成とする．これらが条件をみたすことを確かめる．

$x, x' \in X_i$ とすると，$f_i(x) = f_i(x')$ は $x' = f_{ii}(x) = x$ と同値である．よって，$f_i \colon X_i \to X$ は単射である．$\widetilde{X} = \bigcup_{i \in I} j_i(X_i)$ だから，$X = q(\widetilde{X}) = \bigcup_{i \in I} f_i(X_i)$ である．

$x \in X_i, x' \in X_j$ とすると，$f_i(x) = f_j(x')$ は，$x \in X_{ij}, x' \in X_{ji}$ かつ $x = f_{ij}(x')$ と同値である．よって，(1) の図式は可換であり，$f_i(X_i) \cap f_j(X_j) = f_i(X_{ij}) = f_j(X_{ji})$ もなりたつ．

2.8.1　全射 $p \colon \mathbb{R} \to S^1$ を，$p(t) = (\cos t, \sin t)$ で定義する．$t, s \in \mathbb{R}$ に対し，条件 $p(t) = p(s)$ は，$t = s + 2n\pi$ をみたす整数 n の存在と同値である．よって，命題 2.8.1 より，条件 (1) は，$n \in \mathbb{Z}$ ならば $f(t + 2n\pi) = f(t)$ と同値である．これは条件 (2) と同値である．

2.8.2　1. $a \in \mathbb{Z}$ が必要十分である．$a \in \mathbb{Z}$ とすると，$x - y \in \mathbb{Z}$ なら $ax - ay \in \mathbb{Z}$ である．$x = 1, y = 0$ とすると，$a \cdot 1 - a \cdot 0 \in \mathbb{Z}$ なら，$a \in \mathbb{Z}$ である．

2. $a \neq 0$ ならば，任意の $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対し，集合 $g_a^{-1}(x)$ の元の個数は $|a|$ 個である．$a = 0$ のときは，$x \neq \bar{0}$ なら $g_a^{-1}(x)$ の元の個数は 0 個であり，$x = \bar{0}$ なら $g_a^{-1}(x)$ の元は無限個ある．

2.8.3　1. 写像 $i \colon T^2 \to \mathbb{R}^3$ を $i(x, y, u, v) = (x(u+2), y(u+2), v)$ で定めると，i は単射であり，f は i と問題 2.6.2.1. の写像 f との合成である．よって，問題 2.6.2.1. よりしたがう．

2. $x - y \in \mathbb{Z}^2$ ならば $h(x) - h(y) = h(x - y) \in \mathbb{Z}^2$ である．よって，R は写像 $q \circ h$ が定める同値関係より細かく，$\bar{h} \circ q = q \circ h$ をみたす写像 $\bar{h}$ がただ 1 つ存在する．

$ad - bc = 1$ とする．写像 $k \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，$k(s, t) = (ds - bt,\ -cs + at)$ で定める．写像 $\bar{k} \colon \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ で，$\bar{k} \circ q = q \circ k$ をみたすものが，ただ 1 つ存在する．$h \circ k = k \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ についてもそうだから，$\bar{h} \circ \bar{k} = \bar{k} \circ \bar{h} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2}$ である．

2.8.4　1. $x \in X$ に対し，$i \circ f(x) = \{f(x)\}$ である．$f_*(q(x)) = f(\bar{x}) = \{f(x') \mid x' \sim_R x\}$ である．R が R_f より細かいから，$\{f(x') \mid x' \sim_R x\} = \{f(x)\}$ であり，図式は可換である．

2. 図式が可換だから，$f_*(X/R) = f_*(q(X)) = i(f(X)) \subset i(Y)$ である．

$h \colon i(Y) \to Y$ を $i \colon Y \to i(Y)$ の逆写像とし，$g = h \circ f_*|_{X/R} \colon X/R \to Y$ とおくと，図式は可換だから，$i \circ f = f_* \circ q = i \circ g \circ q$ である．i が単射だから，$f = g \circ q$ である．

2.8.5　1. (1)⇒(2): $f_i = f|_{X_i}$ ならば，$f_i|_{X_i \cap X_j} = f|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}$ である．

(2)⇒(1): 全射 $p\colon \widetilde{X} = \coprod_{i\in I} X_i \to X$ を $p(x,i) = x$ で定める．直和の普遍性より，写像の族 $(f_i)_{i\in I}$ は，写像 $\tilde{f}\colon \widetilde{X} \to Y$ を定める．$x \in X_i, x' \in X_j$ に対し $p(x,i) = p(x',j)$ とは，$x = x' \in X_i \cap X_j$ ということである．(2) の条件がなりたてば，このとき $\tilde{f}(x,i) = f_i(x) = f_j(x') = \tilde{f}(x',j)$ であり，命題 2.8.1.1. より，$f\colon X \to Y$ は well-defined である．

2. 命題 2.8.1.2. より，f は一意的である．

2.9.1　1. $n = 0$ なら $f_0(0) = f_0(1) = 0$ だから，f_0 は単射でない．$f_n(a) = f_n(b)$ ならば，$n(a-b) = 0$ である．$n > 0$ とすると，$a - b > 0$ ならば $n(a-b) > 0$ であり，$a - b < 0$ ならば $n(a-b) < 0$ である．よって，$n(a-b) = 0$ ならば $a - b = 0$ であり，$a = b$ である．よって，$n > 0$ ならば，f_n は単射である．

2. $n = 1$ なら，f_1 は恒等写像だから全射である．$n = 0$ なら f_0 は定数関数 0 だから全射でない．$n > 1$ なら，$a \geq 1$ なら $f_n(a) = na \geq n > 1$ であり，$a \leq 0$ なら $f_n(a) = na \leq 0 < 1$ だから，$f_n(a) = 1$ をみたす $a \in \mathbb{Z}$ は存在しない．よって，$n > 1$ なら，f_n は全射でない．

第3章

3.1.1　数列 $a \in D_m$ に対し，有理数列 (s_n) と (t_n) を $s_n = \sum_{l=0}^{n} \frac{a_l}{m^l}$，$t_n = s_n + \frac{1}{m^n}$ で定める．

1. 逆写像を定める．実数 $r \geq 0$ と自然数 $n \geq 0$ に対し，S_n を $S \leq m^n \cdot r$ をみたす最大の自然数 S とする．$n \geq 1$ なら，$mS_{n-1} \leq S_n < m(S_{n-1} + 1)$ だから，$0 \leq S_n - mS_{n-1} < m$ である．よって，数列 (a_n) を，帰納的に $a_0 = S_0$ と $n \geq 1$ なら $a_n = S_n - mS_{n-1}$ で定めると，$(a_n) \in D_m$ である．実数 $r \geq 0$ に対し，数列 $a = (a_n)$ を対応させることで，写像 $g_m\colon [0,\infty) \to D_m$ を定める．

$r \geq 0$ を実数とし，$a = g_m(r) \in D_m$ とすると，任意の自然数 n に対し，$s_n = \frac{S_n}{m^n} \leq r < t_n$ である．よって，$f_m(a) = \sup_{n\geq 0} s_n \leq r \leq \inf_{n\geq 0} t_n$ である．$\inf_{n\geq 0} t_n - \sup_{n\geq 0} s_n \leq \inf_{n\geq 0} \frac{1}{m^n} = 0$ だから，$f_m(a) = r$ である．よって，$f_m \circ g_m$ は $[0,\infty)$ の恒等写像である．

$a \in D_m$ と自然数 $n < n'$ に対し，$t_n = t_{n'}$ は，任意の $n < l \leq n'$ に対し $a_l = m - 1$ であることと同値である．したがって，$a \in D_m^*$ は，任意の n に対し $f_m(a) < t_n$ であることと同値である．$a = g_m(r)$ なら任意の n に対し $f_m(a) = r < t_n$ だから，$g_m([0,\infty)) \subset D_m^*$ である．

$a \in D_m^*$ とし，$r = f_m(a)$ とおく．任意の自然数 n に対し $s_n \leq r < t_n$ であり，$S_n = m^n s_n$ である．よって，$a = g_m(r)$ である．したがって，$g_m \circ f_m|_{D_m^*}$ は D_m^* の恒等写像である．

2. と 3. D_m^* の部分集合 F_m を，$F_m = \{(a_n) \in D_m \mid a_n \neq 0$ となる自然数 n は有限個$\}$ と定める．$a = (a_n) \in E_m$ に対し，$b = (b_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を式 (3.1) で定めると，$b \in F_m$ である．よって，$a \in E_m$ を $b \in F_m$ にうつす写像 $h_m\colon E_m \to F_m$ が定まる．写像 h_m は可逆

であり，$f_m|_{F_m} \circ h_m = f_m|_{E_m}$ は単射である．さらに，$a \in E_m$ に対し，$b = h_m(a) \in F_m$ は，$f_m(a) = f_m(b)$ をみたす D_m^* のただ 1 つの元である．

3.1.2　1. L が切断の公理をみたすことを示す．(1) $1 \in L, 2 \notin L$ である．(2) は L の定義より明らかである．(3) は $x \in L, x < r, r^2 < 2$ とすると，有理数 $y = \frac{x+r}{2} < r$ は L の元であり $x < y$ である．

2. $1 \in L, \frac{3}{2} \notin L$ よりしたがう．

3. $L^2 \subset L(2)$ を示す．$x \in L^2$ とすると，$x < yz$ をみたす $y, z \in L, y, z > 0$ がある．$y < r, r^2 < 2, z < s, s^2 < 2$ とすると，$x < yz < rs < 2$ である．

$L(2) \subset L^2$ を示す．$x < 2$ とすると，$x < y^2 < 2$ をみたす有理数 $y > 0$ が存在することを示す．$n \geq 2$ を自然数とし，m を $m^2 \leq 2n^2$ をみたす最大の自然数とすると，$\frac{m}{n} < \frac{3}{2}$ だから，$2 - \left(\frac{m}{n}\right)^2 \leq \left(\frac{m+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{2m}{n^2} + \frac{1}{n^2} < \frac{3}{n} + \frac{1}{2n} < \frac{4}{n}$ である．よって，n を x の分母の 4 倍とし，$y = \frac{m}{n}$ とすればよい．さらに，$y^2 < r^2 < 2$ をみたす有理数 $r > 0$ が存在する．$y \in L$ だから，$x \in L^2$ である．

3.1.3　$\mathbb{N}$ が上に有界でないことを示せばよい．上に有界であるとすると，実数の連続性より，上限 s が存在する．s が $\mathbb{N}$ の上限なら，$s - 1 < s$ も $\mathbb{N}$ の上界である．これは矛盾である．

3.1.4　1. (1)⇒(2): $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおく．自然数 $N \geq 1$ に対し，有理数 r_N を $|r_N - a| < \frac{1}{2N}$ をみたすものとする．$|a_n - r_N| \leq |a_n - a| + |r_N - a| < |a_n - a| + \frac{1}{2N}$ だから，$\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - r_N| \geq \frac{1}{N}\} \subset \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| \geq \frac{1}{2N}\}$ は有限集合である．

(2)⇒(1): $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < x\}$ は有限集合 $\}$ とおく．$N \geq 1$ を自然数とすると，$r_N - \frac{1}{N} \in A$ であり，$r_N + \frac{1}{N}$ は A の上界である．よって，A の上限 $s = \sup A$ が存在する．$r_N - \frac{1}{N} \leq s \leq r_N + \frac{1}{N}$ だから，$\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - s| \geq \frac{2}{N}\}$ は有限集合である．N は任意だから，実数のアルキメデス性より，$s = \lim_{n\to\infty} a_n$ である．

2. a を実数とする．$a_0 = 0$ とおく．自然数 $n \geq 1$ に対し，a_n を，$na_n \in \mathbb{Z}$ かつ $a_n \leq a$ をみたす最大の有理数とする．$n \geq 1$ に対し $|a - a_n| < \frac{1}{n}$ だから，$a = \lim_{n\to\infty} a_n$ であり，$(a_n) \in C$ である．よって，$l\colon C \to \mathbb{R}$ は全射である．

3.2.1　1. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (0,1)^n$ とすると，$0 < r = \min(x_1, \ldots, x_n, 1-x_1, \ldots, 1-x_n)$ とおけば，$U_r(x) \subset (0,1)^n$ である．

2. $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in (0,1]^n$ である．任意の実数 $r > 0$ に対し，$(1 + \frac{r}{2}, 1, \ldots, 1) \in U_r(\mathbf{1}), \notin (0,1]^n$ だから，$(0,1]^n$ は開集合でない．$0 \in \mathbb{R}^n \setminus (0,1]^n$ である．任意の実数 $0 < r < n$ に対し，$(\frac{r}{2n}, \ldots, \frac{r}{2n}) \in U_r(0) \cap (0,1]^n$ だから，$(0,1]^n$ は閉集合でもない．

3.2.2　$x \in U$ とし，$r > 0$ を $U_r(x) \subset U$ をみたす正の実数とする．このとき，$d(a,x) > r$ であり，$(d(a,x) - r, d(a,x) + r) \subset d(a, U_r(x))$ だから，$d(a,x)$ は $d(a,\ )$ の U への制限の最大値でも最小値でもない．

3.2.3　1. $\forall x \in U \exists r \in \mathbb{R}(r > 0 \wedge (\forall y \in \mathbb{R}^n(d(x,y) < r \Rightarrow y \in U)))$.

2. $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ の 2 つである．

3.2.4 自然数 n と $i = 1, \ldots, m$ に対し，$|x_{ni} - a_i| \leq d(x_n, a) \leq |x_{n1} - a_1| + \cdots + |x_{nm} - a_m|$ である．よって，$\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$ と，すべての $i = 1, \ldots, m$ に対し，$\lim_{n\to\infty} |x_{ni} - a_i| = 0$ であることは同値である．

3.3.1 $\sup_{r>0} \inf_{x \in U, d(x,a)<r} f(x) = +\infty$ と定義すればよい．

3.3.2 1. (a), (b), (c).

2. (b) が最初にある場合，問題の条件は f の $U_r(a) \cap U$ への制限が定値写像となるような $r > 0$ が存在するということである．(c) が (b) より前にある場合，$x \neq a$ ならば，$r = \frac{1}{2}d(x, a) > 0$ は条件 $d(x, a) < r$ をみたさないので，問題の条件は任意の f についてなりたつ．

3.3.3 $r > 0$ ならば，$f(U_r(0,0) \setminus \{(0,0)\}) = S^1$ である．一方，$q < 1$ なら，$S^1 \subset U_q((a,b))$ をみたす $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ は存在しない．したがって，$\tilde{f}(0,0) = (a, b)$ をどのように定めても，f の $\mathbb{R}^2$ への延長 $\tilde{f}$ は連続にならない．

3.4.1 $(a, b) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ を $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ にうつす写像は逆写像である．

3.4.2 1. $A \in SO(n, \mathbb{R})$ とすると，A は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $a_1, \ldots, a_n$ をならべて得られる行列である．よって，$a_1 = Ae_1$ の長さは 1 である．

$x \in S^{n-1}$ とすると，$\mathbb{R}^n$ の基底 $x = x_1, \ldots, x_n$ が存在する．$\|x\| = 1$ だから，正規直交基底 $x_1, \ldots, x_n$ が存在する．$x_1, \ldots, x_n$ をならべた行列 B は直交行列である．$|\det B| = 1$ だから，$x_1, \ldots, x_{n-1}, (\det B)^{-1} x_n$ も正規直交基底であり，$x_1, \ldots, x_{n-1}, (\det B)^{-1} x_n$ をならべた行列 A も直交行列である．$Ae_1 = x$ であり，$A \in SO(n, \mathbb{R})$ である．

2. $A \in SO(n, \mathbb{R})$ とする．$X \in SO(n, \mathbb{R})$ が $f(A) = f(X)$ をみたすとする．$A^{-1}Xe_1 = e_1$ だから，$A^{-1}X = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & B \end{pmatrix}$ となる $B \in SL(n-1, \mathbb{R}), c \in M(1, n-1; \mathbb{R})$ がある．$A^{-1}X \in SO(n, \mathbb{R})$ だから，$B \in SO(n-1, \mathbb{R})$ であり，$c = 0$ である．

第4章

4.1.1 1. $n \in \mathbb{N}$ に対し，$U_1(n) \cap \mathbb{N} = \{n\}$ である．

2. $a \in A$ とする．$r = \min_{x \in A, x \neq a} d(x, a) > 0$ とすると，$U_r(a) \cap A = \{a\}$ である．

3. A の元の個数が 1 以下なら，A の位相はただ 1 つであり，密着位相である．$a, b \in A \subset \mathbb{R}^n, a \neq b$ とし，$r = \frac{d(a,b)}{2} > 0$ とすると，$U_r(a) \cap U_r(b) = \emptyset$ であり，$U_r(a) \cap A$ と $U_r(b) \cap A$ は，相異なる空でない開集合である．

4. 正の実数 $r > 0$ に対し，$B_r = B \setminus (B \cap [b - r, b + r])$ は $B \setminus \{b\}$ の開集合であり，有限集合である．2. より，B_r は離散である．したがって，$B \setminus \{b\} = \bigcup_{r>0} B_r$ も離散

である．

B が離散空間ならば，$U_r(b) \cap B = \{b\}$ をみたす実数 $r > 0$ が存在する．このとき，$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - b| \geq r\}$ は有限集合である．

4.1.2 1. 開集合の公理をみたすことを確かめればよい．$(U_j)_{j \in J}$ を $\mathcal{O} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$ の元の族とする．任意の $i \in I$ に対し $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}_i$ であり，$\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}$ である．J が有限集合なら，$\bigcap_{j \in J} U_j$ についても同様である．

2. $\{1,2\} \in f^*\mathcal{O}, \{0,2\} \in g^*\mathcal{O}$ だが，$\{1,2\} \cap \{0,2\} = \{2\} \notin f^*\mathcal{O} \cup g^*\mathcal{O}$ である．

4.1.3 1. f が全射でなければ，$Y \notin f_*\mathcal{O}$ だから $f_*\mathcal{O}$ は Y の位相でない．

2. $X = \{0,1,2,3\}, Y = \{0,1,2\}$ とし，$f\colon X \to Y$ を，$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = f(3) = 2$ で定める．$\mathcal{O} = \{\emptyset, X, \{0,2\}, \{1,3\}\}$ は X の位相である．$f_*\mathcal{O} = \{\emptyset, Y, \{0,2\}, \{1,2\}\}$ は，$\{0,2\} \cap \{1,2\} = \{2\} \notin f_*\mathcal{O}$ だから Y の位相でない．

4.1.4 1. (1) $V \in \mathcal{V}$ ならば $V \cup \{c\}$ は c の開近傍であり，さらに $U \in \mathcal{O}_X, U \supset V$ ならば $U \cup V \cup \{c\} = U \cup \{c\}$ も c の開近傍である．よって，$U = (U \cup \{c\}) \cap X \in \mathcal{V}$ である．

(2) $(V_i)_{i \in I}$ が $\mathcal{V}$ の元の有限族ならば，任意の $i \in I$ に対し $V_i \cup \{c\}$ は c の開近傍であり，$\bigcap_{i \in I}(V_i \cup \{c\})$ も c の開近傍である．よって，$\bigcap_{i \in I} V_i = \bigcap_{i \in I}(V_i \cup \{c\}) \cap X \in \mathcal{V}$ である．

2. c が孤立点であるとは，$\{c\}$ が c の開近傍であるということであり，$\emptyset \in \mathcal{V}$ と同値である．

3. $\mathcal{O}$ を Y の位相とする．$\mathcal{O} = \mathcal{O}_X \amalg \{V \amalg \{c\} \mid V \in \mathcal{V}\}$ なら，$X \in \mathcal{O}$ だから，X は開部分空間である．X が開部分空間なら，$\{U \in \mathcal{O} \mid c \notin U\} = \mathcal{O}_X$ であり $\{U \in \mathcal{O} \mid c \in U\} = \{V \cup \{c\} \mid V \in \mathcal{V}\}$ である．

4. $(U_i)_{i \in I}$ を $\mathcal{O}$ の元の族とする．すべての $i \in I$ に対し $U_i \in \mathcal{O}_X$ ならば，$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}$ である．$c \in U_{i_0}, i_0 \in I$ ならば，$U_{i_0} \cap X \in \mathcal{V}$ かつ $U_{i_0} \cap X \subset \bigcup_{i \in I} U_i \cap X \in \mathcal{O}_X$ だから，(1) より，$\bigcup_{i \in I} U_i \cap X \in \mathcal{V}$ である．よって，$\bigcup_{i \in I} U_i = (\bigcup_{i \in I} U_i \cap X) \cup \{c\} \in \mathcal{O}$ である．$(U_i)_{i \in I}$ が有限族であるとする．すべての $i \in I$ に対し $c \in U_i$ ならば，(2) より $\bigcap_{i \in I} U_i \cap X \in \mathcal{V}$ であり，$\bigcap_{i \in I} U_i = (\bigcap_{i \in I} U_i \cap X) \cup \{c\} \in \mathcal{O}$ である．$c \notin U_i$ をみたす $i \in I$ があれば，$\bigcap_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} U_i \cap X \in \mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}$ である．

4.1.5 $c \in f^{-1}(b)$ とする．n を $f(z) - b$ の $z = c$ での零点の位数とすると，$g(z) = \frac{f(z)-b}{(z-c)^n}$ は $U_r(a)$ 上定義された正則関数であり，$g(c) \neq 0$ である．したがって，実数 $0 < s < r - |b - a|$ で，任意の $z \in U_s(c)$ に対し，$g(z) \neq 0$ となるものが存在する．このとき，$U_s(c) \cap f^{-1}(b) = \{c\}$ だから，$f^{-1}(b)$ は離散である．

4.2.1 命題 4.3.4, 命題 4.3.6, 命題 5.1.4.1., 系 5.1.5, 命題 5.2.4, 命題 5.3.2.2., 命題 5.3.7.2., 命題 5.3.11.2., 問題 5.3.2, 問題 5.3.5, 命題 5.4.8, 問題 5.4.5, 問題 6.2.6, 問題 6.4.8.1., 問題 6.4.9.1., 系 6.5.2.1., 問題 8.2.3.

4.2.2 $f\colon U \to W$ と $g\colon W \to U$ を，それぞれ

$$f(x,y) = \left(\frac{(\sqrt{x^2+y^2}+1)x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{(\sqrt{x^2+y^2}+1)y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right),$$
$$g(x,y) = \left(\frac{(\sqrt{x^2+y^2}-1)x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{(\sqrt{x^2+y^2}-1)y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

で定めると，これらは連続で，たがいに逆写像である．

$h\colon V \to W$ と $k\colon W \to V$ を，それぞれ

$$h(x,y) = \begin{cases} (x, y+\sqrt{1-x^2}) & |x| \le 1, y > 0 \text{ のとき}, \\ (x, y-\sqrt{1-x^2}) & |x| \le 1, y < 0 \text{ のとき}, \\ (x,y) & |x| \ge 1 \text{ のとき}, \end{cases}$$
$$k(x,y) = \begin{cases} (x, y-\sqrt{1-x^2}) & |x| \le 1, y > 0 \text{ のとき}, \\ (x, y+\sqrt{1-x^2}) & |x| \le 1, y < 0 \text{ のとき}, \\ (x,y) & |x| \ge 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定めると，これらは連続で，たがいに逆写像である．

4.2.3 1. $f\colon U_1(0) \to \mathbb{R}^n$ と $g\colon \mathbb{R}^n \to U_1(0)$ を，それぞれ

$$f(x) = \frac{2}{1-\|x\|^2}\cdot x, \quad g(x) = \frac{\sqrt{1+\|x\|^2}-1}{\|x\|^2}\cdot x$$

で定めると，これらは連続で，たがいに逆写像である．

2. $x \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ とおく．$f\colon D^n \to (D^1)^n$ と $g\colon (D^1)^n \to D^n$ を，$x \neq 0$ のときは，

$$f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty}\cdot x, \quad g(x) = \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|}\cdot x,$$

$f(0) = g(0) = 0$ で定めると，これらは連続で，たがいに逆写像である．

4.2.4 p は連続である．p の逆写像 $q\colon \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\}$ を求める．$q(x) = ((1-z)x, z)$ とおけば，$(1-z)^2\|x\|^2 + z^2 = 1$ だから，$z = \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}$ である．よって，$q(x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2+1}, \ldots, \frac{2x_n}{\|x\|^2+1}, \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}\right)$ とおけば，q は p の逆写像であり，連続である．

4.2.5 $A \in M(n,\mathbb{R})$ に対し，余因子行列 $\Delta(A)$ の各成分および行列式 $\det A$ は，A の成分の多項式である．$A^{-1} = (\det A)^{-1}\Delta(A)$ だから，$A \in GL(n,\mathbb{R})$ を逆行列 A^{-1} にうつす写像 ${}^{-1}\colon GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ は連続である．${}^{-1}\colon GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ の逆写像は，それ自身だから同相写像である．

4.2.6 1. $s,t \in \mathbb{R}$ に対し，$d(f(s),f(t)) = 2|\sin\frac{s-t}{2}| \le |s-t|$ である．

2. 連続写像 $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ の (a,b) への制限は連続単射である．$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ なら $\frac{2}{\pi}\cdot t \leq \sin t$ だから，$|s-t| \leq \pi$ ならば $d(f(s),f(t)) = 2\sin\frac{|s-t|}{2} \geq \frac{2}{\pi}\cdot|s-t|$ である．よって，逆写像 $g\colon f((a,b)) \to (a,b)$ も連続である．

3. f の制限 $[0,2\pi) \to S^1$ の逆写像 $h\colon S^1 \to [0,2\pi)$ が，連続でないことを示す．h が連続だったとすると，合成写像 $k = h\circ f\colon \mathbb{R} \to [0,2\pi)$ は連続である．$x \in [\pi, 2\pi)$ なら $k(x) = x$ であり，$k(2\pi) = 0$ である．このとき，$|k(x) - k(2\pi)| \geq \pi$ だから矛盾である．

4.2.7 1. (1)⇒(3): W を Z の開集合とすると，$(g\circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ は X の開集合である．

(3)⇒(2): $Z = \mathbb{S}$ とすればよい．

(2)⇒(1): V を Y の開集合とすると，特性関数 $\chi_V\colon Y \to \mathbb{S}$ は連続である．$f^{-1}(V) = (\chi_V \circ f)^{-1}(1)$ は，X の開集合である．

2. 問題 2.3.3 と同様である．

4.3.1 1. $[a,b) \subset [a,b]$ かつ $[a,b]$ は閉集合だから，$[a,b) \subset \overline{[a,b)} \subset [a,b]$ である．命題 4.3.3 より，$b = \sup[a,b)$ は $\overline{[a,b)}$ の元である．よって，$[a,b] = \overline{[a,b)}$ である．

2. $(a,b) \subset (a,b]$ かつ (a,b) は開集合だから，$(a,b) \subset [a,b)^\circ \subset [a,b)$ である．命題 4.3.3 より，1. と同様に $\overline{(-\infty,a)} = (-\infty,a]$ である．したがって，$[a,b)^\circ \subset [a,\infty)^\circ = (a,\infty)$ である．よって，$[a,b)^\circ = (a,b)$ である．

4.3.2 1. $U_1(0) \subset D^n$ であり，D^n は閉集合だから，$U_1(0) \subset \overline{U_1(0)} \subset D^n$ である．$x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1$ とし，$0 < r < 1$ とすると，$(1-\frac{r}{2})x \in U_r(x) \cap U_1(0) \neq \emptyset$ だから，$x \in \overline{U_1(0)}$ である．

2. $U_1(0) \subset D^n$ であり，$U_1(0)$ は開集合だから，$U_1(0) \subset (D^n)^\circ \subset D^n$ である．$x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1$ とし，$0 < r < 1$ とすると，$(1+\frac{r}{2})x \in U_r(x) \setminus (U_r(x) \cap D^n)$ だから，$x \notin (D^n)^\circ$ である．

4.3.3 任意の実数 $r > 0$ に対し，$U_r(b) \cap A \neq \emptyset$ だから，$b \in \overline{A}$ である．$A \subset \overline{A}$ だから，$A \cup \{b\} \subset \overline{A}$ である．

任意の実数 $r > 0$ に対し，$A \setminus (A \cap [b-r, b+r])$ は有限集合だから，閉集合である．したがって，$\overline{A} \subset \bigcap_{r>0}(A \cup [b-r, b+r]) = A \cup \{b\}$ である．

4.3.4 $A = ((0,1)\cap\mathbb{Q}) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup \{4\}$ とすると，$A^\circ = (1,2)\cup(2,3)$，$\overline{A} = [0,3]\cup\{4\}$，$\overline{A^\circ} = [1,3]$，$(\overline{A})^\circ = (0,3)$，$(\overline{A^\circ})^\circ = (1,3)$，$\overline{(\overline{A})^\circ} = [0,3]$.

4.3.5 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合だが，$\mathrm{pr}_2(A) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合でない．

4.3.6 (1)⇒(2): $A = U \cap \overline{A}$ をみたす X の開集合 U が存在する．

(2)⇒(3): U が開集合，F が閉集合で，$A = U \cap F$ ならば，A の任意の点 x に対し U は x の開近傍であり，$A = U \cap F$ は U の閉集合である．

(3)⇒(1): V が X の開集合で $A \cap V$ が V の閉集合ならば，$(A \cap V) \cup (X \setminus V)$ は A

を含む閉集合であり，$A \cap V = \overline{A} \cap V$ である．$\mathcal{U} = \{V \in P(X) \mid V$ は X の開集合であり，$A \cap V = \overline{A} \cap V\}$ とおくと，$U = \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V$ は X の開集合で，$A \cap U = \overline{A} \cap U$ となる．(3) は $A \subset U$ ということだから，$A \cap U = A$ である．

4.3.7 1. (1) $\overline{A} \supset A$ は閉包の定義よりしたがう．(2) $\emptyset$ は閉集合だから，$\overline{\emptyset} = \emptyset$ である．(3) $\overline{A}$ は閉集合だから $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ である．(4) $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ だから $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ である．$\overline{A \cup B} \supset \overline{A}, \overline{B}$ だから $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$ である．

2. $A = (0,1], B = [-1,0]$ とすると，$\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ だが，$\overline{A} \cap \overline{B} = [0,1] \cap [-1,0] = \{0\}$ である．

4.3.8 (1) $X \ni x$ は開集合である．(2) 近傍の定義より明らかである．(3) U が $x \in U \subset V$ をみたす開集合なら，$x \in U \subset V \subset W$ である．(4) U, U' が $x \in U \subset V$ と $x \in U' \subset W$ をみたす開集合なら，$U \cap U'$ は $x \in U \cap U' \subset V \cap W$ をみたす開集合である．(5) U が $x \in U \subset V$ をみたす開集合なら，任意の $y \in U$ に対し，V は y の近傍である．

4.3.9 (1) $U, V \in \mathcal{U}$ かつ $x \in U \cap V$ とすると，$U \cap V$ は x の開近傍だから，$x \in W \subset U \cap V$ をみたす $W \in \mathcal{U}$ が存在する．(2) X は $x \in X$ の開近傍だから，$x \in U \subset X$ をみたす $U \in \mathcal{U}$ が存在する．

第5章

5.1.1 1. (1)⇒(2): f が上半連続ならば，$f^{-1}((-\infty, f(a)+r)) = \{x \in X \mid f(x) < f(a)+r\}$ は，$a \in X$ の開近傍である．

(2)⇒(1): 任意の実数 t に対し，(2) ならば $f^{-1}((-\infty, t)) = \{x \in X \mid f(x) < t\}$ は，命題 4.1.3.1. より，X の開集合である．命題 5.1.4.1. より，f は上半連続である．

2. $t \in \mathbb{R}$ とする．$\{x \in X \mid f(x) < t\} = \bigcup_{i \in I}\{x \in X \mid f_i(x) < t\}$ だから，命題 5.1.4.1. よりしたがう．

3. f を $[0,\infty)$ の特性関数とすると，逆像 $f^{-1}((-\infty, t))$ は，$t \leq 0$ なら $\emptyset$，$0 < t \leq 1$ なら $(-\infty, 0)$，$1 < t$ なら $\mathbb{R}$ だから，f は上半連続である．$f^{-1}(0) = (-\infty, 0)$ は閉集合ではないから，f は連続でない．

5.1.2 生成される位相の定義と，基底の定義よりしたがう．

5.2.1 距離の公理を確かめる．$A \in F(X)$ に対し，$(A \cup A) \setminus (A \cap A) = \emptyset$ だから，$d(A, A) = 0$ である．$d(A, B) = 0$ なら，$A \cup B = A \cap B$ だから，$A = B$ である．$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ だから，$d(A, B) = d(B, A)$ である．$(A \cup C) \setminus (A \cap C) \subset ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup ((C \cup B) \setminus (C \cap B))$ だから，$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ である．

$A \neq B$ ならば $d(A, B) \geq 1$ だから，$U_1(A) = \{A\}$ である．よって，d が定める位相

は離散位相である．

5.2.2 1. 三角不等式を示せばよい．$a, b, c \in S^2$ を相異なる 3 点とする．$A = \{x \in S^2 \mid \delta(a,x) \le \delta(a,b)\}$, $C = \{x \in S^2 \mid \delta(c,x) \le \delta(c,b)\}$ とおく．平面 $L = \mathbb{R}a + \mathbb{R}c$ への直交射影 $p\colon \mathbb{R}^3 \to L$ による A の像 $p(A)$ は，円 $S^2 \cap L$ の弧 $A \cap L$ とそれに対応する弦 S_1 で囲まれた部分である．同様に $p(C)$ は，$C \cap L$ と対応する弦 S_2 で囲まれた部分である．$p(b) \in S_1 \cap S_2$ だから，$S_1 \cap (C \cap L) \neq \emptyset$ である．$e \in S_1 \cap (C \cap L)$ とすると，$\delta(a,c) \le \delta(a,e) + \delta(e,c) \le \delta(a,b) + \delta(b,c)$ である．

2. $x, y \in S^2$ に対し，$d(x,y) = 2\sin\frac{\delta(x,y)}{2} \le \delta(x,y)$ だから，i は連続である．$\delta(x,y) \neq 0$ なら $d(x,y) \neq 0$ だから，i は単射である．問題 4.2.6.2. の解答と同様に，$\delta(x,y) \le \frac{2}{\pi} \cdot d(x,y)$ だから，i はうめこみである．S^2 は $\mathbb{R}^3$ の閉集合だから，i は閉うめこみである．

5.2.3 1. 距離の公理を確かめる．$d(x,y) = 0$ と $d^M(x,y) = 0$ は同値である．$d^M(x,y) = \min(d(x,y), M) = \min(d(y,x), M) = d^M(y,x)$ である．$d^M(x,z) = \min(d(x,z), M) \le \min(d(x,y) + d(y,z), M) \le \min(d(x,y), M) + \min(d(y,z), M) = d^M(x,y) + d^M(y,z)$ である．

2. $r \le M$ ならば，d に関する $U_r(a)$ と d^M に関する $U_r(a)$ は等しい．

5.2.4 1. (2)⇒(1): $f\colon X \to \mathbb{R}$ が連続なら $U = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ は開集合である．

(1)⇒(2): $U = X$ なら，f を定数関数 1 とすればよい．$U \neq X$ ならば，$A = X \setminus U$ とおいて，$f = d(\ , A)$ とすればよい．

2. 命題 5.2.6.2. より，任意の $x \in X$ に対し，$d(x,A) + d(x,B) > 0$ である．$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$ とおく．さらに命題 5.2.6 より，$f\colon X \to \mathbb{R}$ は連続関数であり，$A = f^{-1}(0)$ かつ $B = f^{-1}(1)$ をみたす．

5.2.5 $\sup_{(x,y)\in U_r(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = \sup_{t\in[0,r)} d_{\sup}(g_t, g_0)$ である．(1) は左辺の下限 $\inf_{r>0}$ が 0 ということであり，(2) は右辺の下限 $\inf_{r>0}$ が 0 ということである．

5.2.6 1. $x \in X, y \in Y$ に対し，$y = f(x)$ は $D_f(x,y) = 0$ と同値だから，f のグラフは $\{(x,y) \in X \times Y \mid D_f(x,y) = 0\}$ である．よって，D は単射である．

2. 任意の $(x,y) \in X \times Y$ に対し，$|D_f(x,y) - D_g(x,y)| = |d(f(x),y) - d(g(x),y)| \le |d(f(x),g(x))|$ である．よって，$f(X) \cup g(X)$ が有界ならば，$D_f - D_g$ も有界である．さらに，$\|D(f) - D(g)\|_\infty \le d_{\sup}(f,g)$ である．$y = g(x)$ とおけば，$|D_f(x,g(x)) - D_g(x,g(x))| = |d(f(x),g(x)) - d(g(x),g(x))| = |d(f(x),g(x))|$ だから，$\|D(f) - D(g)\|_\infty \ge d_{\sup}(f,g)$ である．

D は単射だから，$d_{\sup}(f,g) = 0$ と $f = g$ は同値である．$d_{\sup}(f,g) = \|D(f) - D(g)\|_\infty = \|D(g) - D(f)\|_\infty = d_{\sup}(g,f)$ である．$d_{\sup}(f,h) = \|D(f) - D(h)\|_\infty \le \|D(f) - D(g)\|_\infty + \|D(g) - D(h)\|_\infty = d_{\sup}(f,g) + d_{\sup}(g,h)$ である．

3. $d_{\sup}(f,g) = \|D(f) - D(g)\|_\infty = \|\Delta_b(f) - \Delta_b(g)\|_\infty$ である．

5.2.7 1. $r = p^e \frac{n}{m}, s = p^f \frac{k}{l}$ とおく．$e \leq f$ とすると，$r + s = p^e \frac{nl + p^{f-e}km}{ml}$ である．ml は p と素だから，$v_p(r+s) \geq e = \min(v_p(r), v_p(s))$ である．$f \geq e$ のときも同様である．

2. 距離の公理を確かめる．$d_p(x,y) = 0$ なら，$x - y = 0$ であり $x = y$ である．$v_p(-r) = v_p(r)$ だから，$d_p(x,y) = d_p(y,x)$ である．$x \neq y \neq z \neq x$ とすると，1. より，$d_p(x,z) \leq \max(d_p(x,y), d_p(y,z)) \leq d_p(x,y) + d_p(y,z)$ である．どれかが等号のときも，$d_p(x,z) \leq \max(d_p(x,y), d_p(y,z)) \leq d_p(x,y) + d_p(y,z)$ である．

5.3.1 1. 逆写像 $g\colon f(T^2) \to T^2$ は，

$$g(x,y,z) = \left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), (\sqrt{x^2+y^2} - 2, z)\right)$$

で与えられるから，f は単射であり，うめこみである．

2. $\mathbb{R}^3$ の点を列ベクトルで表わすと，$f((s,t),(u,v)) = \begin{pmatrix} s & -t & 0 \\ t & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+2 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$ である．ベクトル $\begin{pmatrix} u+2 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$ は，xz 平面内の点 $(2,0,0)$ を中心とする半径 1 の円周上の点を表わし，行列 $\begin{pmatrix} s & -t & 0 \\ t & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は z 軸を中心とする回転を表わす．$r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおけば，f の像は，$(r-2)^2 + z^2 = 1$ をみたす点 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ 全体である．

5.3.2 (1)⇒(2): $(x,y) \in X \times \mathbb{R}$ を $f(x) - y$ にうつす関数 $F\colon X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続であり，$U = F^{-1}((-\infty, 0)), V = F^{-1}((0,\infty))$ は開集合である．

(2)⇒(1): 任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ に対し，$\{x \in X \mid f(x) < t\}$ と $\{x \in X \mid f(x) > t\}$ は，それぞれ $x \in X$ を $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ にうつす連続写像による U と V の逆像であり，開集合である．よって，系 5.1.5 より f は連続である．

5.3.3 1. f の逆写像 $g\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1} \times (0,\infty)$ は，

$$g(x_1, \cdots, x_n) = \left(\left(\frac{x_1}{\|x\|}, \cdots, \frac{x_n}{\|x\|}\right), \|x\|\right)$$

だから連続であり，f は同相写像である．

2. p は連続全射であり，合成写像 $\| \; \| \circ p\colon S^{n-1} \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ は，第 2 射影 pr_2 である．命題 5.3.2.3. より，pr_2 は開写像である．$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とすると，p は全射だから，$U = p(p^{-1}(U))$ であり，$\|U\| = \mathrm{pr}_2(p^{-1}(U)) \subset [0,\infty)$ は開集合である．

5.3.4 $x \in X$ に対し，$x \in i_b^{-1}(\overline{A})$ は，任意の $V \in \mathcal{V}$ と x の任意の開近傍 U に対し

$(U\times V)\cap A\neq\emptyset$ であることと同値である．$(U\times V)\cap A\neq\emptyset$ は，$U\cap\mathrm{pr}_1((X\times V)\cap A)\neq\emptyset$ と同値である．よって，$x\in i_b^{-1}(\overline{A})$ は，任意の $V\in\mathcal{V}$ に対し $x\in\overline{\mathrm{pr}_1((X\times V)\cap A)}$ であることと同値である．

5.3.5 恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X\to X$ に，命題 5.3.11.2. を適用すればよい．

5.3.6 $(\chi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ による誘導位相は，$\mathcal{U}=\{\chi_U^{-1}(1)\mid U\in\mathcal{U}\}$ で生成される位相である．

5.3.7 1. F は連続写像である．F の逆写像を定義し，連続であることを示す．$A\in GL(n,\mathbb{C})$ を可逆行列とする．A を $\mathbb{C}^n$ の基底 $a_1,\ldots,a_n$ をならべて得られる行列とすると，シュミットの直交化により，実数 $b_1,\ldots,b_n>0$ と正規直交基底 $u_1,\ldots,u_n\in\mathbb{C}^n$ が，

$$b_i=\|a_i-(\langle a_i,u_1\rangle u_1+\cdots+\langle a_i,u_{i-1}\rangle u_{i-1})\|,$$
$$u_i=\frac{1}{b_i}(a_i-(\langle a_i,u_1\rangle u_1+\cdots+\langle a_i,u_{i-1}\rangle u_{i-1}))$$

により帰納的に定まり，$u_1,\ldots,u_n$ をならべて得られる行列 U はユニタリ行列である．A に対し $(U,(b_i)_{1\leq i\leq n},\langle a_j,u_i\rangle_{1\leq i<j\leq n})\in U(n)\times(0,\infty)^n\times\mathbb{C}^{\binom{n}{2}}$ を対応させる写像は連続であり，F の逆写像である．

2. 1. と同様である．

3. 右辺の積の行列式は $\det U\cdot b_1\cdots b_n$ である．$|\det U|=1$ だから，これが 1 であるための必要十分条件は，$\det U=1$ かつ $b_1\cdots b_n=1$ である．

5.3.8 1. f が連続ならば，$f\times\mathrm{id}_Y\colon X\times Y\to Y\times Y$ は連続であり，$D_f=d\circ(f\times\mathrm{id}_Y)$ も連続である．D_f が連続とする．$a\in X$ とすると，$x\in X$ を $d(f(x),f(a))=D_f(x,f(a))\in\mathbb{R}$ にうつす関数 $g_a\colon X\to\mathbb{R}$ は連続である．$r>0$ ならば，$f^{-1}(U_r(f(a)))=g_a^{-1}(U_r(0))$ は開集合だから，f は連続である．

2. $B(X,Y)$ は，連続写像 $\Delta_b\colon\widetilde{B}(X,Y)\to\widetilde{B}(X\times Y)$ による閉集合 $B(X\times Y)$ の逆像だから，閉集合である．

3. $(f,a)\in B(X,Y)\times X$ とする．$r>0$ を正の実数とする．$(g,x)\in U_{\frac{r}{2}}(f)\times f^{-1}(U_{\frac{r}{2}}(f(a)))$ とすると，

$$d(g(x),f(a))\leq d(g(x),f(x))+d(f(x),f(a))<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}$$

だから，$g(x)\in U_r(f(a))$ である．

5.4.1 1. $U\subset\mathbb{R}$ を開集合とすると，$q^{-1}(q(U))=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(U+n)$ は $\mathbb{R}$ の開集合だから，$q(U)$ も開集合である．

2. 1. より，q と i は開写像だから，合成 $\bar{i}=q\circ i$ も開写像である．$\bar{i}$ は連続単射でもあるから，開うめこみである．

5.4.2 f,g は連続だから，像位相は部分空間としての位相より細かい．f,g が定める写像 $f\colon[0,1]\to[0,\frac{1}{2}],g\colon[0,1]\to[\frac{1}{2},1]$ は，同相写像である．$U\subset[0,1]$ を像位相に関す

る開集合とすると，$f^{-1}(U), g^{-1}(U)$ は $[0,1]$ の開集合である．したがって，$A=[0,1]\backslash U$ とおくと，$f(f^{-1}(A)) = A\cap[0,\frac{1}{2}]$ と $g(g^{-1}(A)) = A\cap[\frac{1}{2},1]$ は，それぞれ $[0,\frac{1}{2}]$ と $[\frac{1}{2},1]$ の閉集合である．よって，$A=(A\cap[0,\frac{1}{2}])\cup(A\cap[\frac{1}{2},1])$ は $[0,1]$ の閉集合であり，U は $[0,1]$ の開集合である．

5.4.3 $(0,1]$ は $[0,1]$ の開集合だから，$(0,1]$ の特性関数 $\chi_{(0,1]}\colon [0,1]\to 2$ は，連続写像 $f\colon Y\to\mathbb{S}$ を定める．f は全単射であり，$f^{-1}(0)$ は開集合でないから，同相写像である．

5.4.4 1. $\{c\}$ が閉集合であることは，$Y\setminus\{c\}$ が開集合であることと同値である．商位相の定義より，これは $X\setminus A = q^{-1}(Y\setminus\{c\})$ が開集合であることと同値である．

2. 問題 2.6.3.2. より，$q|_{X\setminus A}\colon X\setminus A\to Y$ は，単射である．$U\subset X\setminus A$ が開集合ならば，$q^{-1}(q(U))=U$ だから，商位相の定義より，$q(U)\subset Y$ は開集合である．よって，$q|_{X\setminus A}$ は開写像である．$q|_{X\setminus A}$ は連続写像でもあるから，開うめこみである．

5.4.5 (1)⇒(2): $f\colon X\to I$ が連続写像なら，任意の i に対し X_i は X の開集合であり，$(X_i)_{i\in I}$ は X の開被覆である．命題 5.4.9.1. より，X の位相は，包含写像 $j_i\colon X_i\to X$ の族による像位相である．

(2)⇒(1): $\coprod_{i\in I} X_i\to X$ が同相写像ならば，任意の i に対し X_i は X の開集合である．よって，$f\colon X\to I$ は連続である．

5.4.6 1. f は連続全単射 $\bar{f}\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z}\to S^1$ をひきおこす．逆写像 $g\colon S^1\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ が連続であることを示せばよい．問題 4.2.6.2. と同様に，任意の a に対し，f の $(a,a+1)$ への制限は開うめこみである．商写像 $q\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の $(a,a+1)$ への制限は連続だから，g の $f((a,a+1)) = S^1\setminus\{f(a)\}$ への制限も連続である．$(S^1\setminus\{f(a)\})_{a\in\mathbb{R}}$ は S^1 の開被覆だから，g は連続である．

2. $\bar{i}\colon[0,1]/R\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ が開写像であることを示せばよい．$U\subset[0,1]/R$ を開集合とする．$q^{-1}(U)\subset[0,1]$ は開集合である．問題 5.4.1.2. より $(0,1)\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は開うめこみだから，$\bar{i}(U)\cap\overline{(0,1)}$ は開集合である．$\bar{0}\in U$ とすると，$[0,r),(s,1]\subset q^{-1}(U)$ をみたす $0<r<s<1$ が存在する．このとき，$\bar{0}\in\overline{(s-1,r)}\subset\bar{i}(U)$ だから，$\bar{i}(U)\subset\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は開集合である．

3. $[0,\frac{1}{2})$ は $[0,1)$ の開集合だが，$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n,n+\frac{1}{2})$ は $\mathbb{R}$ の開集合ではない．

5.4.7 (1)⇒(2): $i\in I$ とする．V を V_i の部分集合とする．V が V_i の開集合であることは，Y の開集合であることと同値である．Y の位相が像位相ならば，これは，$f^{-1}(V)$ が X の開集合であることと同値であり，$f^{-1}(V_i)$ の開集合であることとも同値である．よって，V_i の位相は $f_i\colon f^{-1}(V_i)\to V_i$ による像位相である．

(2)⇒(1): V を Y の部分集合とする．V が Y の開集合であることは，命題 5.4.9.1. より，任意の $i\in I$ に対し $V\cap V_i$ が V_i の開集合であることと同値である．V_i の位相が像位相ならば，これは，任意の $i\in I$ に対し $f^{-1}(V\cap V_i) = f^{-1}(V)\cap f^{-1}(V_i)$ が $f^{-1}(V_i)$ の開集合であることと同値である．さらに，命題 5.4.9.1. より，これは $f^{-1}(V)$ が X

の開集合であることとも同値である．よって，Y の位相は f による像位相である．

5.4.8 1. $p^{-1}(U_i) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合であり，$p^{-1}(U_1), \ldots, p^{-1}(U_{n+1})$ は $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の開被覆だから，$U_1, \ldots, U_{n+1}$ は $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ の開被覆である．

2. 連続写像 $\tilde{j}_i \colon \mathbb{R}^n \to p^{-1}(U_i)$ を $\tilde{j}_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n)$ で定める．合成 $j_i = p \circ \tilde{j}_i \colon \mathbb{R}^n \to U_i \subset \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ は連続である．連続写像 $f_i \colon p^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^n$ を

$$f_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

で定める．問題 5.4.7 より，f_i は連続写像 $g_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ をひきおこす．g_i は $j_i \colon \mathbb{R}^n \to U_i$ の逆写像だから，j_i は同相写像である．

3. $f_*(\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}))$ と $\mathbf{P}^n(\mathbb{R}) \setminus U_{n+1}$ は，どちらも $\{(x_1 : \ldots : x_{n+1}) \in \mathbf{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_{n+1} = 0\}$ であり，閉集合である．$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ は単射だから，単射 $f_* \colon P(\mathbb{R}^n) \to P(\mathbb{R}^{n+1})$ をひきおこし，$f_* \colon \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \to \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ も単射である．$(f_*(\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})) \cap U_i; 1 \leq i \leq n)$ は $f_*(\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}))$ の開被覆である．j_i の制限は，同相写像 $\mathbb{R}^{n-1} \to f_*(\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})) \cap U_i$ を定める．よって，2. より，$f_* \colon \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \to f_*(\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}))$ は同相写像である．

5.4.9 $\mathcal{O}$ を Y の位相とし，$\mathcal{O}'$ を f による Y の像位相とする．f は連続だから，$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ である．

1. f が開写像ならば，$\{f(U) \mid U$ は X の開集合 $\} \subset \mathcal{O}$ である．$V \in \mathcal{O}'$ ならば $f^{-1}(V)$ は X の開集合であり，f が全射だから $V = f(f^{-1}(V))$ である．よって，$\mathcal{O}' \subset \{f(U) \mid U$ は X の開集合 $\}$ である．

2. f が閉写像で U が X の開集合ならば，$Y \setminus f_!(U) = f(X \setminus U)$ は Y の閉集合だから，$\{f_!(U) \mid U$ は X の開集合 $\} \subset \mathcal{O}$ である．$V \in \mathcal{O}'$ ならば $f^{-1}(V)$ は X の開集合であり，f が全射だから $V = f_!(f^{-1}(V))$ である．よって，$\mathcal{O}' \subset \{f_!(U) \mid U$ は X の開集合 $\}$ である．

5.4.10 (1)⇒(2): X_i と X_j が X の開部分空間だから，共通部分 $X_i \cap X_j$ は，X_i と X_j の開部分空間である．相対位相は，2 つとも，X からの相対位相と一致する．

(2)⇒(1): $i \in I$ とする．任意の $j \in I$ に対し，$X_i \cap X_j$ は X_j の開集合だから，X_i は像位相に関して，X の開集合である．

X_i の X の像位相からの相対位相 $\mathcal{O}'_i$ が $\mathcal{O}_i$ であることを示す．$X_i \to X$ は連続だから，$\mathcal{O}'_i \subset \mathcal{O}_i$ である．$\mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}'_i$ を示す．$U \in \mathcal{O}_i$ とする．任意の $j \in I$ に対し，$U \cap X_j = U \cap (X_i \cap X_j)$ は X_i の開集合だから，$X_i \cap X_j$ の開集合であり，X_j の開集合である．よって，U は像位相に関して X の開集合であり，$U = U \cap X_i \in \mathcal{O}'_i$ である．

5.4.11 1. $B \cap (q^{-1}(y_0) \times Z) = \emptyset$ だから，$(q \times \mathrm{id}_Z)^{-1}(C) = B$ は，$X \times Z$ の閉集合である．よって，C は像位相に関して閉集合である．

2. $\overline{C} \setminus C \supset \{y_0\} \times (\overline{(A \cap \overline{Z})} \cap Z)$ を示す．$c \in \overline{(A \cap \overline{Z})} \cap Z$ とする．y_0 の任意の開近傍 U と，任意の実数 $0 < r < 1$ に対し，$(q^{-1}(U) \times (U_r(c) \cap Z)) \cap B \neq \emptyset$ を示せばよ

い．$c \in \overline{(A \cap \overline{Z})}$ だから，$|a-c| < r$ をみたす $a \in A \cap \overline{Z}$ がある．$q^{-1}(U)$ は $(a,0) \in X$ の開近傍だから，$U_s((a,0)) \cap X \subset q^{-1}(U)$ かつ $s < r - |a-c|$ をみたす実数 $s > 0$ がある．$a \in \overline{Z}$ だから，$|z-a| < s$ をみたす $z \in Z$ がある．$|z-a| < y < s$ とすると，$(a,y,z) \in ((U_s((a,0)) \cap X) \times (U_r(c) \cap Z)) \cap B$ である．

$\overline{C} \setminus C = \overline{C} \cap (\{y_0\} \times Z) \subset \{y_0\} \times Z$ である．$c \in Z \setminus (\overline{(A \cap \overline{Z})} \cap Z)$ として，$(y_0, c) \notin \overline{C}$ を示す．$U_r(c) \cap A \cap \overline{Z} = \emptyset$ をみたす実数 $0 < r < 1$ がある．任意の $a \in A$ に対し，$((U_s((a,0)) \cap X) \times (U_{\frac{r}{2}}(c) \cap Z)) \cap B = \emptyset$ をみたす実数 $s > 0$ が存在することを示せばよい．

$a \notin \overline{Z}$ とする．$U_s(a) \cap Z = \emptyset$ をみたす実数 $s > 0$ が存在する．$(x,y,z) \in ((U_{\frac{s}{2}}((a,0)) \cap X) \times Z) \cap B$ とすると，$|z-a| \leq |z-x| + |x-a| \leq y + \frac{s}{2} < s$ となって，$z \in U_s(a) \cap Z = \emptyset$ であり，矛盾である．$a \in \overline{Z}$ とする．$s = \frac{r}{4}$ とし，$(x,y,z) \in ((U_s((a,0)) \cap X) \times (U_{\frac{r}{2}}(c) \cap Z)) \cap B$ とすると，$|a-c| \leq |a-x| + |x-z| + |z-c| < \frac{r}{4} + y + \frac{r}{2} < r$ となって，$a \in U_r(c) \cap A \cap \overline{Z} = \emptyset$ であり，やはり矛盾である．

3. 2. より，$\overline{C} \setminus C = \{y_0\} \times Z$ である．$q \times \mathrm{id}_Z \colon X \times Z \to Y \times Z$ は連続だから，$Y \times Z$ の積位相は，積写像 $q \times \mathrm{id}_Z \colon X \times Z \to Y \times Z$ による像位相より粗い．$C \subset Y \times Z$ は，1. より像位相に関して閉集合であり，2. より積位相に関して閉集合でないから，積位相は像位相より真に粗い．

第 6 章

6.1.1　1. $A \subset X$ を有限部分集合とする．$x \in X$ ならば $\{x\}$ は X の閉集合だから，$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ も閉集合である．$x \in A$ とすると，$A \setminus \{x\}$ も閉集合だから，x は A の孤立点である．

2. (1)⇒(3): 命題 6.1.3.2. よりしたがう．

(3)⇒(2): $x \in X$ ならば，X が有限集合だから，$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} (X \setminus \{y\})$ は開集合である．すべての点が孤立点だから，離散である．

(2)⇒(1): X が離散なら $X \times X$ も離散であり，$\Delta \subset X \times X$ は閉集合である．

6.1.2　$C \subset X \times X$ は $\Delta_{X/R} \subset (X/R) \times (X/R)$ の逆像だから，X/R がハウスドルフなら閉集合である．

6.1.3　命題 6.1.6 より，f のグラフ Γ は，$X \times Y$ の閉集合である．第 1 射影の Γ への制限 $\mathrm{pr}_1|_\Gamma \colon \Gamma \to X$ は同相写像であり，Γ_A の像は A だから，Γ_A は Γ の稠密部分集合である．

6.1.4　1. 行列 $A \in M(n, \mathbb{R})$ をベクトルと考えたとき，A の長さの 2 乗は $\mathrm{Tr}\,({}^tAA)$ である．よって，$\|V(x)\|^2 = \frac{\mathrm{Tr}(x{}^tx \cdot x{}^tx)}{({}^txx)^2} = \frac{{}^txx \cdot {}^txx}{({}^txx)^2} = 1$ であり，$V(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subset S^{n^2-1}$ である．$p \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ を $p(x) = \mathbb{R} \cdot x$ で定まる標準写像とすると，$p^{-1}(p(x)) = \{ax \mid a \in \mathbb{R}^\times\}$ である．$a \in \mathbb{R}^\times$ なら $V(x) = V(ax)$ だから，$V \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to M(n, \mathbb{R})$

は，連続写像 $\bar{V}\colon \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \to S^{n^2-1}$ をひきおこす．行列 $V(x)$ の列によって生成される $\mathbb{R}^n$ の部分空間は，$\mathbb{R}x$ である．よって，$V(x) = V(y)$ なら $p(x) = p(y)$ である．したがって，連続写像 $\bar{V}$ は単射である．

2. $\bar{V}\colon \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \to S^{n^2-1}$ は連続単射だから，命題 6.1.4 より，$\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ はハウスドルフである．

6.1.5　1. $A \cap U = A$ は U の閉集合であり，$A \cap T = \emptyset$ は T の閉集合である．よって，A は X の閉集合である．

2. 包含写像 $U \to \mathbb{R}^2, T \to \mathbb{R}^2$ は連続だから，命題 5.4.8 より $X \to \mathbb{R}^2$ は連続である．したがって，X の位相は，$\mathbb{R}^2$ の部分空間としての位相より細かい．

$A \subset X$ は X の閉集合だが，$\mathbb{R}^2$ の部分空間としての位相に関しては閉集合でないから，X の位相は，$\mathbb{R}^2$ の部分空間としての位相より真に細かい．

3. $\mathbb{R}^2$ はハウスドルフで，包含写像 $X \to \mathbb{R}^2$ は連続単射だから，命題 6.1.4 より，X はハウスドルフである．

4. W を $q(0,0) \in Y$ の開近傍，W' を $q(0,1) \in Y$ の開近傍とする．$W \cap W' \neq \emptyset$ であることを示す．$q^{-1}(W) \subset X, q^{-1}(W') \subset X$ は，それぞれ $(0,0) \in X, A \subset X$ の開近傍である．したがって，実数 $0 < r < 1$ で，$U_r(0,0) \cap T \subset q^{-1}(W)$ をみたすものがあり，実数 $0 < s < \frac{r}{2}$ で，$U_s(0, \frac{r}{2}) \subset q^{-1}(W')$ をみたすものがある．よって，$(\frac{s}{2}, \frac{r}{2}) \in q^{-1}(W) \cap q^{-1}(W') \neq \emptyset$ である．

5. $(q \times q)^{-1}(\Delta_Y) = \Delta_X \cup (A \times A)$ である．1. より，これは $X \times X$ の閉集合である．

6.2.1　1. 関数 $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ を，$f(x) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}$ で定める．f は連続で単調増加であり，$f((a,b)) = \mathbb{R}$ である．よって，系 6.2.6.2. より，同相写像である．

2. 対数関数 log を，$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ で定義すると，$\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ は単調増加連続関数で，全射である．よって，系 6.2.6.2. より同相写像である．

6.2.2　1.　$S^n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\}$ は $\mathbb{R}^n$ と同相だから連結である．$n \geq 1$ なら，$S^n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\}$ は S^n で稠密だから，S^n も連結である．

2. 1. より S^1 は連結だから，系 6.2.10 より，$T^n = (S^1)^n$ も連結である．

6.2.3　1. 対偶を示す．$\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ とする．$U = X \setminus \overline{B}, V = X \setminus \overline{A}$ とすると，$U \cup V = X$ かつ $U \cap V \cap (A \cup B) = \emptyset$ であり，$U \cap (A \cup B) = A \neq \emptyset, V \cap (A \cup B) = B \neq \emptyset$ である．

2. $A = [0,1], B = (1,2)$ は，(2)⇒(1) の反例である．$A = (0,1), B = (1,2)$ は，(3)⇒(2) の反例である．

6.2.4　$r > 0$ を正の有理数とすると，$U = \mathbb{Q} \cap U_{\sqrt{2}r}(0)$ と $\mathbb{Q} \setminus U$ は $\mathbb{Q}$ の開集合だから，0 を含む $\mathbb{Q}$ の連結成分 A は，$A \subset \bigcap_{r>0, r\in\mathbb{Q}} U_{\sqrt{2}r}(0) = \{0\}$ をみたす．任意の実数 $r > 0$ に対し，$\mathbb{Q} \cap U_r(0) \supsetneqq \{0\}$ だから，$A = \{0\}$ は $\mathbb{Q}$ の開集合ではない．

6.2.5　1. $n = 1$ なら $V = \{x \in U \mid x < a\}$ と $W = \{x \in U \mid x > a\}$ は U の空でない開集合であり，$V \cap W = \emptyset, V \cup W = U \setminus \{a\}$ である．

$n \geq 2$ とする．$f\colon U \setminus \{a\} \to 2$ を連続関数とする．$r > 0$ を $U_r(a) \subset U$ をみたす実数とする．$U_r(a) \setminus \{a\}$ は弧状連結だから，f の $U_r(a) \setminus \{a\}$ への制限は定数関数である．したがって，f を延長する連続関数 $\tilde{f}\colon U \to 2$ が存在する．U は連結だから $\tilde{f}$ は定数関数であり，f も定数関数である．よって，$U \setminus \{a\}$ も連結である．

2. 同相写像 $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ が存在したとして，矛盾を導く．$a = f(0)$ とおくと，f は，同相写像 $(0,1) \to \mathbb{R} \setminus \{a\}$ をひきおこす．命題 6.2.12 より $(0,1)$ は連結だが，1. より $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ は連結でないから矛盾である．

3. 同相写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ が存在したとして，矛盾を導く．$a = f(0)$ とおくと，f は，同相写像 $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ をひきおこす．1. より $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ は連結でないが，$\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ は連結だから矛盾である．

6.2.6　1. $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid f_a(x) > y\} = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid F(x,y) < a\}$ と $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid f_a(x) < y\} = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid F(x,y) > a\}$ は，$X \times \mathbb{R}$ の開集合である．よって，問題 5.3.2 より f_a は連続である．

2. $(x,z) \in X \times [a,b]$ とする．$F(x, f_a(x)) \leq z \leq F(x, f_b(x))$ だから，中間値の定理より，$F(x,y) = z$ をみたす $y \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ存在し，$f_a(x) \leq y \leq f_b(x)$ である．よって，Γ は関数 G のグラフである．問題 5.3.2 より，$\{(x,z,y) \in X \times [a,b] \times \mathbb{R} \mid G(x,z) < y\} = \{(x,z,y) \in X \times [a,b] \times \mathbb{R} \mid F(x,y) > z\}$ は $X \times [a,b] \times \mathbb{R}$ の開集合である．同様に，$\{(x,z,y) \in X \times [a,b] \times \mathbb{R} \mid G(x,z) > y\}$ も $X \times [a,b] \times \mathbb{R}$ の開集合だから，問題 5.3.2 より G も連続である．

6.2.7　1. 定値写像 $[0,1] \to X$ は連続だから，反射律がなりたつ．$f\colon [0,1] \to X$ が連続ならば，$g\colon [0,1] \to X$ を $g(t) = f(1-t)$ で定めると，g も連続だから，対称律がなりたつ．$f, g\colon [0,1] \to X$ が連続で $f(1) = g(0)$ ならば，$h\colon [0,1] \to X$ を $h(t) = f(2t)$ $(0 \leq t \leq \frac{1}{2}), h(t) = g(2t-1)$ $(\frac{1}{2} \leq t \leq 1)$ で定めると，問題 5.4.2 より h も連続だから，推移律がなりたつ．

$f\colon [0,1] \to X$ が連続なら，命題 6.2.9 より，$f([0,1])$ は連結だから，R' は R より細かい．

2. $x \in X$ とすると，$U_r(x) \subset X$ をみたす実数 $r > 0$ がある．$U_r(x)$ の点は x と R' に関して同値である．よって，R' に関する同値類は開集合である．

商空間 X/R' は離散である．したがって，X の連結部分集合は，R' に関する同値類の部分集合である．よって，同値関係 R は R' より細かい．したがって，R に関する同値類は，R' に関する同値類と等しく，開集合である．

6.2.8　$g\colon A \to 2$ を連続写像とする．任意の $y \in f(A)$ に対し，$A_y = A \cap f^{-1}(y)$ は連結だから，$g|_{A_y}$ は定値写像である．したがって，$g = h \circ f|_A$ をみたす写像 $h\colon f(A) \to 2$ がただ 1 つ存在する．$f(A)$ の位相は像位相だから，h は連続である．したがって，h は定値写像であり，$g = h \circ f|_A$ も定値写像である．

6.2.9　1. $\{(0,0)\}$ と $\{0\} \times (0,1]$ は A の開集合である．

2. f が $(0,0)$ で連続であることを示せばよい．$f(0,0)=a$ とする．任意の実数 $r>0$ に対し，$f(U_q(0,0)\cap T)\subset U_{\frac{r}{2}}(a)$ をみたす実数 $q>0$ が存在する．$U_q(0,0)\cap X\subset \overline{U_q(0,0)\cap T}$ だから，$f(U_q(0,0)\cap X)\subset \overline{f(U_q(0,0)\cap T)}\subset \overline{U_{\frac{r}{2}}(a)}\subset U_r(a)$ である．よって，f は X の $\mathbb{R}^2$ の部分空間としての位相に関して連続である．

3. A は $\mathbb{R}^2$ の部分空間としての位相に関して，閉区間と同相だから，2. と系 6.3.7 よりしたがう．

6.2.10　(1)⇒(2): 選択公理より，$a=(a_i)\in\prod_{i\in I}X_i$ が存在する．I の任意の有限部分集合 J に対し，系 6.2.10 と J の元の個数に関する帰納法により，$\prod_{i\in J}X_i$ は連結である．写像 $f_J\colon\prod_{i\in J}X_i\to\prod_{i\in I}X_i$ を，$(x_i)_{i\in J}$ を $((x_i)_{i\in J},(a_i)_{i\in I\setminus J})$ にうつす写像とすると，$a\in\prod_{i\in I}X_i$ を含む連結成分は，$f_J(\prod_{i\in J}X_i)$ を部分集合として含む．合併 $\bigcup_{J\subset I;\ \text{有限部分集合}} f_J(\prod_{i\in J}X_i)$ は，$\prod_{i\in I}X_i$ で稠密だから，系 6.2.4.1. より，$\prod_{i\in I}X_i$ も連結である．

(2)⇒(1): $j\in I$ とする．$\prod_{i\in I}X_i=X_j\times\prod_{i\in I,i\neq j}X_i$ が連結なら，系 6.2.10 より，X_j も連結である．

6.2.11　1. n に関する帰納法で示す．$n=1$ なら，$SO(1,\mathbb{R})=\{1\}$ は連結である．$n\geq 2$ とする．$f\colon SO(n,\mathbb{R})\to S^{n-1}$ を $f(A)=Ae_1$ で定める．f は全射であり，像は連結である．各点の逆像も，問題 3.4.2.2. と帰納法の仮定により連結である．$SO(n,\mathbb{R})$ はコンパクトだから，命題 6.5.1 より f は閉写像である．問題 5.4.9.2. より，S^{n-1} の位相は $f\colon SO(n,\mathbb{R})\to S^{n-1}$ による像位相である．よって，問題 6.2.8 より，$SO(n,\mathbb{R})$ は連結である．

2. 問題 5.3.7.2. より，包含写像がひきおこす写像 $\pi_0(O(n,\mathbb{R}))\to\pi_0(GL(n,\mathbb{R}))$ は可逆である．$SO(n,\mathbb{R})$ と $SO(n,\mathbb{R})\cdot\begin{pmatrix}-1&0&\cdots&0\\0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$ は連結だから，合成写像 $\pi_0(O(n,\mathbb{R}))\to\{\pm1\}$ も可逆である．

6.3.1　1. $\mathbb{R}$ の開集合の族 $(U_i)_{i\in I}$ が，$B\subset\bigcup_{i\in I}U_i$ をみたすとする．$b\in U_i$ をみたす $i=i_0\in I$ があり，$U_r(b)\subset U_{i_0}$ をみたす実数 $r>0$ がある．このとき，$N=\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\notin U_{i_0}\}\subset\{n\in\mathbb{N}\mid |a_n-b|\geq r\}$ は有限集合である．各 $n\in N$ に対し $a_n\in U_{i_n}$ をみたす $i_n\in I$ をとれば，$B\subset U_{i_0}\cup\bigcup_{n\in N}U_{i_n}$ である．

2. $b\notin A$ ならば，問題 4.1.1.4. より，$A=B\setminus\{b\}$ は離散である．よって，A がコンパクトなら，A は有限である．このとき，$b\in A$ となり，矛盾である．

6.3.2　X の開集合の族 $(U_i)_{i\in I}$ で $A\subset\bigcup_{i\in I}U_i$ をみたし，I の有限個の元 $i_1,\ldots,i_n$ をどのようにとっても，A の元 x で $x\notin U_{i_1}\cup\cdots\cup U_{i_n}$ となるものが存在する．

6.3.3　$I=\mathbb{N}\setminus\{0\}$ とおき，$i\in I$ に対し，$U_i=(\frac{1}{i},\infty)$ とおく．$(0,1]\subset\bigcup_{i\in I}U_i=$

$(0,\infty)$ である．$i > i_1, \ldots, i_n$ ならば，$(0,1] \not\subset U_i \supset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ である．

6.3.4 半閉区間 $[a,b)$ の場合には，$A = [a,b)$ を示しても $b \notin A$ なので，$[a,b) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ をみたす有限個の元 $i_1, \ldots, i_n \in I$ の存在が導けない．

半閉区間 $(a,b]$ の場合には，$a \notin A$ だから，$A \neq \emptyset$ が示せない．

6.3.5 $A \subset X$ を $X = \bigcup_{a \in A} U_1(a)$ をみたす有限部分集合とする．$M > 0$ を，任意の $a, b \in A$ に対し $d(a,b) \leq M$ をみたす実数とする．任意の $x, y \in X$ に対し，$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(a,y) < 1 + M + 1$ をみたす $a, b \in A$ が存在する．

6.3.6 1. 点列 $a = (a_n) \in 2^{\mathbb{N}}$ を，次のように帰納的に定める．$a_0 = p_1(0)$ とおく．帰納的に a_{n-1} まで定まったとき，$a_n = p_{n+1}((a_0, \ldots, a_{n-1}, 0))$ とおく．(1) より，$p_{n_0}(q_{n_0}(a)) = 1$ をみたす n_0 が存在する．

$0 \leq n \leq n_0$ に関する上からの帰納法で，任意の $0 \leq n \leq n_0$ に対し $p_n(q_n(a)) = 1$ を示す．n_0 の定義より，$p_{n_0}(q_{n_0}(a)) = 1$ である．$0 < n \leq n_0$ とし $p_n(q_n(a)) = 1$ とする．$a_{n-1} = p_n((a_0, \ldots, a_{n-2}, 0))$ が 0 とすると $p_n(q_n(a)) = 1$ に矛盾するから，$a_{n-1} = p_n((a_0, \ldots, a_{n-2}, 0)) = 1$ である．$p_n((a_0, \ldots, a_{n-2}, 1)) = p_n(q_n(a))$ も 1 だから，(2) より $p_{n-1}(q_{n-1}(a)) = 1$ である．よって，上からの帰納法により，$p_0(q_0(a)) = 1$ である．

2. $(U_i)_{i \in I}$ を $2^{\mathbb{N}}$ の開被覆とする．n を自然数とする．$x \in 2^n$ に対し，$q_n^{-1}(x) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}$ をみたす有限個の元 $i_1, \ldots, i_m \in I$ が存在するという条件の，真理値関数を p_n とする．積位相の特徴づけより，1. の条件 (1) がなりたつ．$q_{n+1}^{-1}((x,0)) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}$ と $q_{n+1}^{-1}((x,1)) \subset U_{j_1} \cup \cdots \cup U_{j_l}$ をみたす有限個の元 $i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, i_l \in I$ が存在すれば，$q_n^{-1}(x) = q_{n+1}^{-1}((x,0)) \cup q_{n+1}^{-1}((x,1)) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m} \cup U_{j_1} \cup \cdots \cup U_{j_l}$ である．よって，(2) もなりたつ．1. より，$2^{\mathbb{N}} = q_0^{-1}(1) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}$ をみたす有限個の元 $i_1, \ldots, i_m \in I$ が存在する．

6.4.1 $b \in A$ とする．$B = \{x \in A \mid d(a,x) \leq d(a,b)\}$ は有界閉集合である．したがって，B はコンパクトである．$b \in B$ であり，B は空でないから，命題 6.3.3 より，関数 $-d(a, \ )$ の B への制限には最大値があり，関数 $d(a, \ )$ の B への制限には最小値がある．

6.4.2 1. 任意の実数 $r > 0$ に対し，$(\frac{2}{r}, \frac{r}{2}) \in \mathbb{R} \times U_r(0)$ だが $\notin W$ である．

2. $Y = \mathbb{R}, y = 0$ として，命題 6.4.1 を適用すればよい．

3. 問題 4.3.5 より，$\mathrm{pr}_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は閉写像でない．よって，命題 6.4.4 より，$\mathbb{R}$ はコンパクトでない．

6.4.3 1. S^1 はコンパクトだから，$T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ もコンパクトである．

2. $O(n,\mathbb{R})$ は，$M(n,\mathbb{R})$ の有界閉集合だから，コンパクトである．

6.4.4 1. U を，$Y \times \{0\} \subset U$ をみたす $Y \times \mathbb{S}$ の開集合とする．$y \in Y$ に対し，$i_y \colon \mathbb{S} \to Y \times \mathbb{S}$ を，$i_y(z) = (y,z)$ で定めると，$i_y^{-1}(U)$ は 0 を含む開集合だから，$i_y^{-1}(U) = \mathbb{S}$ である．y は任意だから，$U = Y \times \mathbb{S}$ である．

2. X の開集合の族 $(U_i)_{i\in I}$ が $[0,1]\times\{0\}\subset A\subset\bigcup_{i\in I}U_i$ をみたすなら，$[0,1]\times\{0\}$ はコンパクトだから，$[0,1]\times\{0\}\subset U_{i_1}\cup\cdots\cup U_{i_n}$ をみたす有限部分集合 $\{i_1,\ldots,i_n\}\subset I$ がある．1. より，$U_{i_1}\cup\cdots\cup U_{i_n}=X$ である．

3. B は $[0,1]$ と同相だからコンパクトである．$A\cap B$ は $(0,1]$ と同相だからコンパクトでない．

6.4.5 1. Y を任意の位相空間，$y\in Y$ を任意の点，W を $2^{\mathbb{N}}\times\{y\}$ の任意の開近傍とする．n を自然数とする．$x\in 2^n$ に対し，$q_n^{-1}(x)\times V\subset W$ をみたす y の開近傍 V が存在するという条件の，真理値関数を p_n とする．

積位相の特徴づけより，問題 6.3.6.1. の条件 (1) がなりたつ．$q_{n+1}^{-1}((x,0))\times V_0\subset W, q_{n+1}^{-1}((x,1))\times V_1\subset W$ をみたす y の開近傍 V_0,V_1 が存在すれば，y の開近傍 $V=V_0\cap V_1$ は $q_n^{-1}(x)\times V\subset W$ をみたすから，(2) もなりたつ．よって，問題 6.3.6.1. より，$2^{\mathbb{N}}\times V=q_0^{-1}(1)\times V\subset W$ をみたす y の開近傍が存在する．

2. 2 進小数展開が定める連続写像 $e_2\colon 2^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}$（例題 5.3.8）の像は $[0,1]$ であり，$2^{\mathbb{N}}$ はコンパクトだから，系 6.4.3 より閉区間 $[0,1]$ はコンパクトである．$a<b$ なら $[a,b]$ は $[0,1]$ と同相だからコンパクトである．

6.4.6 X を位相空間，$A\subset X$ を空でないコンパクト集合，$f\colon X\to\mathbb{R}$ を連続関数とし，$f(A)$ の最大値が存在することを示す．f のかわりに，f と上に有界な単調増加関数 $-e^{-x}$ の合成関数を考えることにより，$f(A)$ が上に有界である場合に示せばよい．上限 $s=\sup f(A)$ が $f(A)$ の元でないと仮定して矛盾を導く．$s\notin f(A)$ とすると，$W=\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}\mid f(x)<y\}$ は $A\times\{s\}$ の開近傍である．命題 6.4.1 より，実数 $r>0$ で，$A\times U_r(s)\subset W$ をみたすものがある．このとき，$s-r$ は $f(A)$ の上界となり，s が上限であることに矛盾する．よって，$s\in f(A)$ である．

6.4.7 S^{n-1} はコンパクトだから，$\mathrm{pr}_2\colon S^{n-1}\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ は，命題 6.4.4 より閉写像でもある．あとは，問題 5.3.3.2. と同様である．

6.4.8 1. 系 5.1.5 より，任意の実数 $r\in\mathbb{R}$ に対し，$U_r=\{y\in Y\mid M(y)>r\}$ が Y の開集合であり，$A_r=\{y\in Y\mid M(y)\geq r\}$ が Y の閉集合であることを示せばよい．$V_r=\{(x,y)\in X\times Y\mid f(x,y)>r\}, B_r=\{(x,y)\in X\times Y\mid f(x,y)\geq r\}$ とおくと，V_r は $X\times Y$ の開集合であり，B_r は $X\times Y$ の閉集合である．射影 $\mathrm{pr}_2\colon X\times Y\to Y$ は，命題 5.3.2.3. より開写像であり，命題 6.4.4 より閉写像である．よって，$U_r=\mathrm{pr}_2(V_r)$ は Y の開集合であり，$A_r=\mathrm{pr}_2(B_r)$ は Y の閉集合である．

2. $f(x,y)=\frac{\min(x,y)}{\max(x,y)}$ とすると，$y>0$ なら $M(y)=1$ であり，$M(0)=0$ である．

6.4.9 1. 命題 6.4.4 より，X がコンパクトなら，射影 $\mathrm{pr}_1\colon T\times X\to T$ は閉写像である．よって，$A\subset X$ が閉集合なら $f^{-1}(A)=\mathrm{pr}_1(\mathrm{pr}_2^{-1}(A)\cap\Gamma)\subset T$ も閉集合であり，f は連続である．

2. $f(0)=0, f(x)=\frac{1}{x}\ (x>0)$.

6.4.10　$q > 0$ を実数とし，$A = \{(x, x') \in X \times X \mid d_Y(f(x), f(x')) \geq q\}$ とおく．$d_X \colon X \times X \to \mathbb{R}$ は連続で，A は $X \times X$ の閉集合だからコンパクトであり，d の A への制限の最小値 $r > 0$ が存在する．$x, x' \in X$ に対し，$d(x, x') < r$ ならば $d_Y(f(x), f(x')) < q$ である．

6.5.1　商写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ の $[0,1]^n$ への制限は全射だから，商空間 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ はコンパクトである．$f^n \colon \mathbb{R}^n \to T^n$ がひきおこす写像 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to T^n$ は連続全単射で T^n はハウスドルフだから，系 6.5.2.1. より，同相写像である．

6.5.2　1. $X = S^1 \times [0,1]$ はコンパクトで，D^2 はハウスドルフだから，連続全単射 $\bar{f} \colon \overline{X} \to D^2$ は同相写像である．

2. $q \colon X \to \overline{X}$, $q_0 \colon U \to \overline{U}$ を商写像とし，$i \colon \overline{U} \to \overline{X}$ を包含写像とする．V を $\overline{U}$ の開集合とすると，$q^{-1}(i(V)) = q_0^{-1}(V)$ は X の開集合だから，$i(V)$ は $\overline{X}$ の開集合である．よって，連続単射 $i \colon \overline{U} \to \overline{X}$ は，開写像であり，開うめこみである．1. より $\bar{f}$ は同相写像だから，$\bar{g}$ はうめこみである．$g(U) = U_1(0,0)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合だから，$\bar{g}$ は開うめこみである．

6.5.3　1. $\mathrm{pr}_1 \colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ は閉写像だから，$\mathrm{pr}_1(\overline{\Gamma})$ は $[0,1]$ の閉集合である．$\mathrm{pr}_1(\Gamma) = (0,1]$ だから，$\mathrm{pr}_1(\overline{\Gamma}) = [0,1]$ である．よって，A は空でない．

$a = \inf A, b = \sup A$ とすると，A は閉集合だから $a, b \in A$ である．$(a,b) \subset A$ を示す．$y \in (a,b)$ とし，$r > 0$ を $r < \min(b-y, y-a) < 1$ をみたす任意の実数とする．$(s, f(s)) \in U_r(0,a) \cap \Gamma, (t, f(t)) \in U_r(0,b) \cap \Gamma$ をみたす実数 $s, t \in (0,1]$ が存在する．$f(s) < y < f(t)$ である．$0 < s, t < r$ だから，中間値の定理より，$y = f(x)$ をみたす実数 $0 < x < r$ が存在する．$(x, y) \in U_r(0,y) \cap \Gamma \neq \emptyset$ である．r は任意だから，$y \in A$ である．

2. (2)⇒(1): $\bar{f} \colon [0,1] \to [0,1]$ が連続ならば，$\bar{f}(0) = \lim_{t \to 0} f(t)$ である．

(1)⇒(2): $\bar{f} \colon [0,1] \to [0,1]$ を，$\bar{f}(0) = \lim_{t \to 0} f(t)$ で定義すれば，$\bar{f}$ は連続である．

(2)⇒(4): 問題 6.1.3 より，$\overline{\Gamma}$ は $\bar{f}$ のグラフである．連続写像 $\gamma \colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ を $\gamma(x) = (x, \bar{f}(x))$ で定めれば，$\overline{\Gamma} = \gamma([0,1])$ は弧状連結である．

(4)⇒(3): $c \in A$ とする．連続写像 $g \colon [0,1] \to \overline{\Gamma}$ を，$g(0) = (0,c), g(1) = (1, f(1))$ をみたすものとする．t を，コンパクト部分集合 $g^{-1}(\overline{\Gamma} \cap (\{0\} \times [0,1])) \subset [0,1]$ の最大値とし，$\Gamma' = g([t,1])$ とおく．連続関数 $h \colon [t,1] \to [0,1]$ を，$h = \mathrm{pr}_1 \circ g|_{[t,1]}$ で定めると，$h(t) = 0, h(t) = 1$ だから，中間値の定理より，h は全射である．よって，射影の Γ' への制限 $\mathrm{pr}_1|_{\Gamma'} \colon \Gamma' \to [0,1]$ は全射である．$\mathrm{pr}_1|_{\Gamma'}^{-1}(0) = \{(0, g(t))\}$ だから，$\mathrm{pr}_1|_{\Gamma'} \colon \Gamma' \to [0,1]$ は全単射であり，Γ' は写像 $[0,1] \to [0,1]$ のグラフである．$[t,1]$ はコンパクトだから，Γ' は閉集合である．$\Gamma \subset \Gamma' \subset \overline{\Gamma}$ だから，$\Gamma' = \overline{\Gamma}$ である．

(3)⇒(2): 問題 6.4.9.1. よりしたがう．

3. 連続関数 $f \colon (0,1] \to [0,1]$ を，$f(x) = \frac{1}{2}(\sin \frac{1}{x} + 1)$ で定める．f のグラフ Γ は連結だから，その閉包は連結閉集合だが，2. より，弧状連結でない．

6.5.4 1. $x_0 = 0$ なら，$0 \leq c_3(x) \leq \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{3}$ である．同様に，$x_0 = 1$ なら，$\frac{2}{3} \leq c_3(x) \leq 1$ である．

2. 例題 5.3.8 より，e_3 は連続だから，c_3 も連続である．問題 3.1.1.3. より，c_3 は単射である．$2^{\mathbb{N}}$ はコンパクトで $\mathbb{R}$ はハウスドルフだから，系 6.5.2.2. より，c_3 は閉うめこみである．

6.5.5 $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ はコンパクトであり，S^{n^2-1} はハウスドルフである．よって，連続単射 $\overline{V} \colon \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \to S^{n^2-1}$ は，系 6.5.2.2. より，閉うめこみである．

6.5.6 1. X はコンパクトだから X' もコンパクトであり，Y はハウスドルフである．よって，f がひきおこす連続全単射 $X' \to Y$ は系 6.5.2.1. より，同相写像である．

2. $f^{-1}(V) \cap U = \{(x, y) \in U \mid x < \frac{1}{2}\}$ は U の開集合である．

3. $V \subset Y$ は，2. より U の像位相に関して開集合であり，1. より X の像位相に関しては開集合でない．

6.5.7 1. 系 6.5.2.3. より，$[0, 1]$ の位相は，全射 e_4 による像位相である．よって，p が well-defined であることを示せばよい．p が well-defined であることは問題 3.1.1.3. を使って示せるが，詳細は省略する．

2. 系 6.5.2.1. より，全単射 $f \colon [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$ が連続ならば，同相写像である．f は，弧状連結でない空間 $[0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ から弧状連結な空間 $[0, 1] \times [0, 1] \setminus \{f(\frac{1}{2})\}$ への同相写像をひきおこすことになり，矛盾である．

3. $(e_2 \times e_2) \circ q \circ \tilde{p}$ は全射だから，p も全射である．2. より，p は全単射でないから，単射でない．

6.6.1 $U_r(0, 0) \cap A \subset U$ をみたす実数 $r > 0$ がある．$B = \overline{U_{\frac{r}{2}}(0, 0)} \cap A \subset U$ は A の閉集合である．したがって，U を含む A のコンパクト集合が存在すれば，B もコンパクトである．B は $\mathbb{R}^2$ の閉集合でないから矛盾である．

6.6.2 問題 6.3.1.1. より，X はコンパクトである．問題 4.1.1.4. より，$f(\mathbb{N})$ は離散である．よって，$f \colon \mathbb{N} \to X$ は開うめこみであり，X は $\mathbb{N}$ の 1 点コンパクト化である．

6.6.3 立体射影 $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^2$ の逆写像は，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を $\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$ にうつす写像である．$\frac{z}{w} = x + \sqrt{-1}y$ とおいて，分母を払えばよい．

6.6.4 命題 6.5.5 より，$S^{n-1} \subset D^n$ を 1 点につぶして得られる空間は，$D^n \setminus S^{n-1} = U_1(0)$ の 1 点コンパクト化である．$U_1(0)$ は $\mathbb{R}^n$ と同相だから，$D^n \setminus S^{n-1}$ の 1 点コンパクト化は，$\mathbb{R}^n$ の 1 点コンパクト化 S^n と同相である．

6.6.5 1. X がコンパクトでなければ，$f(X)$ は Y の閉集合でない．よって，$\overline{f(X)} = Y$ である．

2. 1. と系 6.2.4.1. より，X が連結なら Y も連結である．

6.6.6 1. $m \neq n$ なら $d_\infty(e_m, e_n) = 1$ である．よって，任意の $x \in l^2$ に対し，$U_1(x) \cap C$ の元の個数は 1 以下であり，C は閉集合である．C は離散だが，有限集合ではないからコンパクトでない．

2. C は B の閉集合だが，1. より，C はコンパクトでない．よって，B もコンパクトでない．

3. l^∞ が局所コンパクトだったとして矛盾を導く．l^∞ の 0 の開近傍 U とコンパクト集合 A で $U \subset A$ をみたすものがある．実数 $0 < r$ で，$U_r(0) \subset U$ をみたすものがある．s を $0 < s < r$ をみたす実数とすると，閉球 $B_s = \{x \in l^\infty \mid \|x\|_\infty \leq s\} \subset U_r(0) \subset U \subset A$ は閉集合だから，コンパクトである．s 倍写像 $B \to B_s$ は同相写像だから，2. に矛盾する．

6.6.7 $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視し，$\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ の部分空間と考える．同相写像 $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ を，$f(z) = \frac{2}{z}$ で定める．

1. f の X への制限は，同相写像 $f|_X\colon X \to [-1,1] \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ を定める．よって，f は X の 1 点コンパクト化から $[-1,1]$ への同相写像を定める．

2. f は，直線 $l = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ z = 1\}$ を，円 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ から原点をのぞいたものへ，同相にうつす．同様に，f は，直線 $l' = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ z = -1\}$ を，円 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| = 1\}$ から原点をのぞいたものへ，同相にうつす．よって，f の $Y = l \amalg l'$ への制限は，同相写像 $f|_Y\colon Y \to V \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ を定め，f は Y の 1 点コンパクト化から V への同相写像を定める．

3. f は，直線 $l'' = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ z = 1\}$ を，円 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + \sqrt{-1}| = 1\}$ から原点をのぞいたものへ，同相にうつす．よって，f の $Z = l \cup l''$ への制限は，同相写像 $f|_Z\colon Z \to W \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ を定め，f は Z の 1 点コンパクト化から W への同相写像を定める．

6.6.8 1. $Y = \bigcup_{i=0}^{n-1}\{(x, ix) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ とおき，$f\colon X \to Y$ を $f(x,i) = (x, ix)$ で定めると，f は開うめこみである．Y はコンパクトであり，$f(X)$ の補集合は $\{(0,0)\}$ だから，f は 1 点コンパクト化からの同相写像を定める．

2. $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ を，$n = 0$ のとき $f(t,n) = (t,0)$, $n \geq 1$ のとき $f(t,n) = \left(\frac{t}{n^2}, \frac{t}{n}\right)$ で定めると，f はうめこみである．A をコンパクト集合 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq x \leq 1\}$ とし，U を開集合 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, \frac{y}{x} \notin \mathbb{N}\}$ とすると，$Y = \overline{f(X)}$ は $A \setminus (A \cap U)$ であり，コンパクトである．$Y \setminus f(X)$ は 1 点 $(0,0)$ である．

6.6.9 V を Z の開集合とする．$g^{-1}(V)$ は X の開集合だから，$V \subset g(X)$ なら，$p^{-1}(V) = f(g^{-1}(V)) \subset f(X)$ は Y の開集合である．$V \not\subset g(X)$ なら，f の制限 $X\setminus g^{-1}(V) \to f(X\setminus g^{-1}(V)) = Y\setminus p^{-1}(V)$ と，g の制限 $X\setminus g^{-1}(V) \to g(X\setminus g^{-1}(V)) = Z \setminus V$ は，同相写像である．$Z \setminus V$ はコンパクトだから，$Y \setminus p^{-1}(V)$ もコンパクトであり，命題 6.5.3.1. より，Y の閉集合である．この場合も，$p^{-1}(V)$ は Y の開集合である．

6.6.10 1. Y を X のコンパクト化とし，$\overline{\overline{A}}$ を A の Y での閉包とする．$\overline{\overline{A}}$ は Y の閉

集合だから，コンパクトである．$\overline{A}=\overline{\overline{A}}\cap X$ は $\overline{\overline{A}}$ の開集合だから，A も $\overline{\overline{A}}$ の開集合である．よって，命題 6.6.3 より，A は局所コンパクトである．

2. $x\in A$ とし，$U\subset X$ を x の開近傍，K を A のコンパクト集合で，$A\cap U\subset K$ をみたすものとする．K は X の閉集合だから，$A\cap U=K\cap U$ は U の閉集合である．よって，問題 4.3.6 よりしたがう．

6.6.11 1. 対偶を示す．$a\in U$ とし，$|f|(a)$ が $|f|$ の最大値であるとして，f が定数関数であることを示す．問題 4.1.5 より，$U=U_s(a)$ の場合に示せばよい．$f(a)=0$ なら $f=0$ だから，$f(a)\neq 0$ としてよい．f を $\frac{f}{f(a)}$ でおきかえて，$f(a)=1$ としてよい．任意の実数 $0<r<s$ に対し，コーシーの積分公式より，$1=f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,f(a+re^{i\theta})d\theta$ である．$|\mathrm{Re}\,f(a+re^{i\theta})|\leq|f(a+re^{i\theta})|\leq 1$ だから，任意の $0<r<s, 0\leq\theta\leq 2\pi$ に対し，$\mathrm{Re}\,f(a+re^{i\theta})=1$ であり，したがって $f(a+re^{i\theta})=1$ である．よって，f は定数関数 1 である．

2. $V=D\setminus C$ は $\mathbb{C}$ の連結開集合だから，1. より，$|f|$ の V への制限には最大値がない．よって，$\max_{z\in D}|f(z)|=\max_{z\in C}|f(z)|$ である．

$f(z)=0$ をみたす $z\in D$ がないとする．$g(z)=f(z)^{-1}$ で定めると g は V で定義された正則関数である．よって，1. より，$|g|$ には最大値がなく，$|f|$ の V への制限には最小値がない．したがって，$\min_{z\in D}|f(z)|=\min_{z\in C}|f(z)|$ である．

第7章

7.1.1 $X=m, Y=n$ としてよい．m に関する帰納法で示す．$m=0$ なら，Y^X の元の個数は 1 である．$m\geq 1$ なら $Y^m=Y^{m-1}\times Y$ だから，帰納法の仮定より Y^m の元の個数は $n^{m-1}\cdot n=n^m$ である．

7.1.2 1. A, B が有限集合で Card A = Card B なら，命題 7.1.5 より，$C_B|_B\circ(C_A|_A)^{-1}\colon A\to B$ は全単射である．$A, B\subset\mathbb{N}$ が無限集合のときも同様である．

全単射 $A\to B$ が存在すれば，Card A = Card B である．

2. f の定義より，$f(P(\mathbb{N}))\subset\mathbb{N}\cup\{\mathbb{N}\}$ であり，f の $\mathbb{N}\cup\{\mathbb{N}\}$ への制限は恒等写像である．よって，$f(P(\mathbb{N}))=\mathbb{N}\cup\{\mathbb{N}\}$ であり，$f^2=f$ である．問題 2.6.4 より，$f(P(\mathbb{N}))$ は完全代表系である．

7.1.3 1. $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ に対し，$g_2^{-1}(m,n)=(m,m+n+1)$, $f_2(m,m+n+1)=\{m,m+n+1\}$ であり，$b(\{m,m+n+1\})=2^{m+n+1}+2^m$ である．$2^a+2^b\in A(a>b\geq 0)$ に対し $C_A(2^a+2^b)=\binom{a}{2}+b$ だから，合成 $f\colon\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ は，$f(m,n)=\binom{m+n+1}{2}+m$ で定まる写像である．

自然数 N に対し，$L_N=\{(m,n)\in\mathbb{N}^2 \mid m+n+1=N\}$ とおく．$\mathbb{N}^2=\coprod_{N\in\mathbb{N}}L_N$

であり，(m,n) を m にうつす写像は，全単射 $L_N \to N$ を定める．$\binom{N+1}{2} = \sum_{n=0}^{N} n$ だから，f は全単射である．

2. 自然数の 2 進表示が定める命題 7.1.8 の全単射 $b\colon F(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ の逆写像との合成を $h = b^{-1} \circ g\colon \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \to F(\mathbb{N})$ とする．$\mathbb{N}^{n-1} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \subset \mathbb{N}^n$ を $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ の部分集合と同一視すると，$\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} = \{0\} \amalg \coprod_{n>0}(\mathbb{N}^{n-1} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}))$ である．h の $\mathbb{N}^{n-1} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ への制限は，$(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \mapsto (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1)$ で定まる可逆写像 $\mathbb{N}^{n-1} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \to \mathbb{N}^n$ と，系 7.1.9.1. の証明の単射 $f_n \circ g_n^{-1}\colon \mathbb{N}^n \to F(\mathbb{N})$ の合成である．この像は $\{A \in F(\mathbb{N}) \mid \text{Card } A = n\}$ だから，h は可逆である．

7.1.4　系 7.1.9.3. より $X \times Y$ も可算集合であり，命題 7.1.8 より $F(X \times Y)$ も可算集合である．

有限部分集合 $A \subset X$ と写像 $f\colon A \to Y$ に対し，f のグラフ $\Gamma_f \subset A \times Y \subset X \times Y$ は，$X \times Y$ の有限部分集合である．$(f, A) \in \coprod_{A \in F(X)} \text{Map}(A, Y)$ に対し，$\Gamma_f \in F(X \times Y)$ を対応させる写像 $\coprod_{A \in F(X)} \text{Map}(A, Y) \to F(X \times Y)$ は単射である．$F(X \times Y)$ は可算集合だから，$\coprod_{A \in F(X)} \text{Map}(A, Y)$ も可算集合である．

7.1.5　$a\colon I \to \mathbb{N}$ を単射とする．$i \in I$ に対し，M_i を $\{f\colon X_i \to \mathbb{N} \mid f \text{ は単射 }\}$ とおく．すべての $i \in I$ に対し，$M_i \neq \emptyset$ だから，選択公理より，$\prod_{i \in I} M_i \neq \emptyset$ である．$(g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$ とし，写像 $h\colon \coprod_{i \in I} X_i \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ を，$h(x_i, i) = (g_i(x_i), a(i))$ で定める．h は単射だから，直和 $\coprod_{i \in I} X_i$ は可算である．全射 $\coprod_{i \in I} X_i \to \bigcup_{i \in I} X_i$ があるから，$\bigcup_{i \in I} X_i$ も可算である．

7.2.1　$X_{2m} = \{2^m n + (2^m - 1) \mid n \in \mathbb{N}\}, X_{2m+1} = \{2^m n + (2^{m+1} - 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ だから，$X' = \{2^m - 1 \mid m \in \mathbb{N}\}, X'' = \mathbb{N} \setminus X', X_\infty = \emptyset$ である．$n \in X'$ なら，$h(n) = 2n$ であり，$n \notin X'$ なら，$h(n) = n - 1$ である．

7.2.2　$\text{Card } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \text{Card } 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \text{Card } 2^{\mathbb{N}} = \text{Card } \mathbb{R}$ である．

7.2.3　1. $\text{Card } \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \geq \text{Card } 2^{\mathbb{R}} > \text{Card } \mathbb{R}$ である．$\text{Card } \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \text{Card } 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}} \leq \text{Card } 2^{\mathbb{R}^2} = \text{Card } 2^{\mathbb{R}}$ である．

2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ は稠密であり，$\mathbb{R}$ はハウスドルフだから，系 6.1.7 より，制限写像 $C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ は単射である．$\text{Card } \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} = \text{Card } 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \text{Card } \mathbb{R}$ だから，$\text{Card } C(\mathbb{R}) \leq \text{Card } \mathbb{R}$ である．定数関数を対応させる写像 $\mathbb{R} \to C(\mathbb{R})$ は単射だから，$\text{Card } C(\mathbb{R}) \geq \text{Card } \mathbb{R}$ である．

7.2.4　単射 $(0,1) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ があるから，$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は可算ではない．全射 $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ があるから，$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は可算である．包含写像 $2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ は単射だから，$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ は可算ではない．問題 7.1.3.2. より $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ は可算である．

7.2.5　$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ を，$x \in \mathbb{N}$ なら $f(x) = x + 1$, $x \notin \mathbb{N}$ なら $f(x) = x$ で定めれば，これは全単射である．

7.3.1 定理 7.3.7 より，単射 $X \amalg X \to X$ が存在する．$\mathrm{id}_X \amalg f\colon X \amalg Y \to X \times X$ も単射だから，その合成 $X \amalg Y \to X$ も単射である．$X \times Y \to X$ についても同様である．

7.3.2 問題 2.7.2 より，命題 2.7.5.2.(1)⇒(2) を示せばよい．$f\colon X \to Y$ を全射とする．

$$S = \left\{ A \in P(Y \times X) \,\middle|\, \begin{array}{l} A \text{ は } Y \text{ の部分集合 } Z \text{ からの写像 } s\colon Z \to X \text{ で } f \circ s : Z \to Y \\ \text{が包含写像であるもののグラフ} \end{array} \right\}$$

とおく．S は包含関係に関して帰納的順序集合であり，したがって，S の極大元 A が存在する．A を写像 $s\colon Z \to X$ のグラフとし，$Y = Z$ を示せばよい．$y \in Y \setminus Z$ とし，$x \in f^{-1}(y)$ とすると，$A \cup \{(y, x)\} \in S$ であり，A が極大元であることに矛盾する．

第 8 章

8.1.1 V を a の開近傍とする．$U_r(a) \subset U \cap V$ をみたす実数 $r > 0$ が存在する．$a + (\frac{r}{2}, 0, \ldots, 0) \in (U \setminus \{a\}) \cap V$ である．

8.1.2 c の任意の開近傍 $(U \cap V \cap A) \cup \{c\}$ に対し，$((U \cap V \cap A) \cup \{c\}) \cap A = U \cap V \cap A \neq \emptyset$ である．a の任意の開近傍 U に対し，$(U \cap A) \cup \{c\}$ は c の開近傍であり，$((U \cap A) \cup \{c\}) \cap A = U \cap A \subset U$ である．よって，$x \in A$ が c に近づくとき $f(x)$ は a に収束する．b についても同様である．

8.1.3 $\mathcal{O} \in S_A$ ならば $\mathcal{O} \cup P(A)$ によって生成される位相 $\mathcal{O}'$ も S_A の元である．よって，$\mathcal{O}$ が S_A の極大元ならば，$\mathcal{O} = \mathcal{O}' \supset \mathcal{O} \cup P(A)$ である．

8.1.4 $(X_i)_{i \in I}$ を空でない集合の族とする．$i \in I$ に対し，$Y_i = X_i \amalg \{y_i\}$ とおき，Y_i の位相を $\{\emptyset, \{y_i\}, Y_i\}$ で定める．Y_i はコンパクトだから，チコノフの定理より，積空間 $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ もコンパクトである．$i \in I$ に対し，Y の開集合 U_i を $U_i = \mathrm{pr}_i^{-1}(y_i)$ で定める．$\prod_{i \in I} X_i = Y \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$ だから，$\prod_{i \in I} X_i = \emptyset$ ならば，$(U_i)_{i \in I}$ は Y の開被覆である．したがってこのとき，I の有限個の元 $i_1, \ldots, i_n$ で，$Y = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ をみたすものが存在する．$j = 1, \ldots, n$ に対し，$x_{i_j} \in X_{i_j}$ をとり，$z = (z_i) \in Y$ を，$i = i_j$ なら $z_{i_j} = x_{i_j}$，そうでなければ $z_i = y_i$ で定めると，$z \notin U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ となり，矛盾が得られる．

8.2.1 1. (x_{m_n}) を (x_n) の部分列とする．写像 $\tilde{m}\colon \widetilde{\mathbb{N}} \to \widetilde{\mathbb{N}}$ を，$\tilde{m}(n) = m_n, \tilde{m}(\infty) = \infty$ で定めると，$\tilde{m}$ は連続である．連続写像 $\tilde{x}\colon \widetilde{\mathbb{N}} \to X$ を式 (8.2) で定めると，合成写像 $\tilde{x} \circ \tilde{m}$ は連続であり，(x_{m_n}) は a に収束する．

2. $m_0 = 0$ とおき，数列 (m_n) を帰納的に定義する．m_{n-1} まで定義されたとし，$r_n = \min(\{d(x_m, a) \mid m \leq m_{n-1}, x_m \neq a\} \cup \{\frac{1}{n}\}) > 0$ とおく．$m \leq m_{n-1}$ ならば，$x_m \notin U_{r_n}(a) \setminus \{a\}$ である．a は A の集積点だから，$(U_{r_n}(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ である．m_n を，$x_m \in (U_{r_n}(a) \setminus \{a\}) \cap A$ をみたす最小の自然数 m とする．$m_n > m_{n-1}$ であ

り，$d(x_{m_n}, a) < r_n \leq \frac{1}{n}$ だから，部分列 (x_{m_n}) は a に収束する．

8.2.2 1. すべての $n \geq 0$ に対し，$f_n(0) = 0$ である．$m \geq n \geq 1$ に対し，$x \in [\frac{1}{n}, 1]$ なら，$f_m(x) = 0$ である．自然数 $n \geq 1$ に対し，$\|f_n\|_1 = \frac{\|f_1\|_1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ であり，$\|f_n\|_\infty = \|f_1\|_\infty \geq 1$ である．

2. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty$ だから，L^∞ ノルムが定める位相は，L^1 ノルムが定める位相より細かい．1. より，この 2 つの位相は等しくない．

3. $\lim_{n\to\infty} f_n = 0, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$ だが，$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = 1 \neq 0$ である．

8.2.3 X の位相 $\mathcal{O}$ が，すべての連続写像 $\widetilde{\mathbb{N}} \to X$ の族による像位相であることを示せばよい．つまり，

$$\mathcal{O} = \left\{ U \in P(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in U \text{ かつ } X \text{ の点列 } (x_n) \text{ が } a \text{ に収束するならば，} \\ \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin U\} \text{ は有限集合である} \end{array} \right\}$$

をいえばよい．$\subset$ は明らかである．$\supset$ を示す．U が右辺の元であるとし，$A = X \setminus U$ とおくと，$\overline{A} = A$ となることを示せばよい．$a \in \overline{A}$ とする．系 8.2.4.2. より a に収束する A の点列 (x_n) がある．$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin U\} = \mathbb{N}$ は無限集合だから，$a \notin U$ である．よって，$a \in A$ である．

8.3.1 1. $n \geq m \geq 1$ とすると，$\|g_n - g_m\|_1 \leq \frac{2}{m}\|g\|_\infty$ である．h が L^1 ノルムに関して (g_n) の極限だったとすると，$h(x) = 0$ $(0 \leq x < \frac{1}{2})$，$h(x) = 1$ $(\frac{1}{2} < x \leq 1)$ でなければならないが，h は連続関数にはならない．

2. $\sup_{n \geq m} \|g_n - g_m\|_\infty \geq \lim_{n\to\infty} |g_n(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}) - g_m(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})| = 1$ である．

8.3.2 $((x_n, y_n))$ を $X \times Y$ のコーシー列とする．$d_X(x_n, x_m) \leq d((x_n, y_n), (x_m, y_m))$ だから，(x_n) は X のコーシー列である．X は完備だから，(x_n) は X の点 a に収束する．同様に，(y_n) も Y のコーシー列であり，Y の点 b に収束する．$d((x_n, y_n), (a, b)) \leq d_X(x_n, a) + d_Y(y_n, b)$ だから，点列 $((x_n, y_n))$ は (a, b) に収束する．よって，$X \times Y$ は完備である．

8.3.3 1. $|x - y| < s + t$ のときは，

$$\begin{aligned} 2 \cdot d(f(x,s), f(y,t)) &= 2\max(2s, 2t, s + t + |x - y|) - (2s + 2t) \\ &= 2\max(|s - t|, |x - y|) \end{aligned}$$

である．$|x - y| \geq s + t$ のときは，$2 \cdot d(f(x,s), f(y,t)) = 2s + 2t$ である．$r < s$ ならば $f^{-1}(U_r(f(x,s))) = U_r(x) \times U_r(s)$ かつ $f(U_r(x) \times U_r(s)) = U_r(f(x,s))$ だから，単射 f は連続開写像であり，開うめこみである．

2. (A_n) を X のコーシー列とし，$s_n = d(A_n, \emptyset)$，$\lim_{n\to\infty} s_n = s$ とする．$s = 0$ ならば，(A_n) は $\emptyset$ に収束する．

$s > 0$ とする．n_0 を $m, m' \geq n$ なら $s_m \geq \frac{s}{2}$ かつ $d(A_m, A_{m'}) \leq \frac{s}{2}$ となる最小の自

然数 n とする．$m \geq n_0$ なら $A_m = f(x_m, s_m)$ とおく．$m, m' \geq n_0$ なら $s_m + s'_m \geq s$ だから，$d(A_m, A_{m'}) = \max(|x_m - x_{m'}|, |s_m - s_{m'}|)$ である．よって，(x_n) もコーシー列であり，(A_n) は $f(\lim_{n\to\infty} x_n, s)$ に収束する．

8.3.4 X の点列 (x_n) と実数列 (r_m) を，次のように帰納的に定義する．$x_0 \in X$ を任意にとる．$m \geq 0$ とし，$n < 2^m$ に対し x_n が定義されているとする．任意の $n, n' < 2^m, n \neq n'$ に対し $3r_m < d(x_n, x_{n'})$ をみたす実数 $r_m > 0$ をとり，$n < 2^m$ に対し $d(x_{2^m+n}, x_n) < r_m$ をみたす $x_{2^m+n} \neq x_n$ をとる．$3r_{m+1} < d(x_0, x_{2^m}) < r_m$ である．$n' - n$ が 2^m でわりきれるならば，$d(x_{n'}, x_n) \leq \sum_{k=0}^{\infty} r_{m+k} < \frac{3}{2} r_m$ である．

自然数 n に対し，写像 $q_n \colon 2^{\mathbb{N}} \to \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ を，写像 $a = (a_k) \colon \mathbb{N} \to 2 = \{0, 1\}$ に対し，$q_n(a) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k 2^k$ で定める．$r_m \to 0$ だから，(x_n) の部分列 $(x_{q_n(a)})$ はコーシー列である．X は完備だから，$(x_{q_n(a)})$ は収束する．$x_a = \lim_{n\to\infty} x_{q_n(a)}$ とおき，写像 $f \colon 2^{\mathbb{N}} \to X$ を $f(a) = x_a$ で定める．

$a, b \in 2^{\mathbb{N}}$ が $q_n(a) = q_n(b)$ をみたすとすると，$d(x_a, x_b) \leq d(x_a, x_{q_n(a)}) + d(x_b, x_{q_n(a)}) \leq \frac{3}{2} r_n + \frac{3}{2} r_n$ である．よって，$f \colon 2^{\mathbb{N}} \to X$ は連続である．

一方，$q_n(a) \neq q_n(b)$ とすると，$d(x_a, x_b) \geq d(x_{q_n(a)}, x_{q_n(a)}) - d(x_a, x_{q_n(a)}) - d(x_b, x_{q_n(b)}) > 3r_n - 2 \cdot \frac{3}{2} r_n = 0$ だから，$f \colon 2^{\mathbb{N}} \to X$ は連続単射である．$2^{\mathbb{N}}$ はコンパクトで X はハウスドルフだから，f は閉うめこみである．

8.3.5 $A \subset \mathbb{R}$ を，上に有界であり空でない部分集合とする．$a \in A$ とし，b を A の上界とする．$a_0 = a, b_0 = b$ とおき，数列 $(a_n), (b_n)$ を次のように帰納的に定める．$\frac{a_n + b_n}{2}$ が A の上界ならば，$a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ とおき，そうでなければ，$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = b_n$ とおく．$n \geq 0$ に対し $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$ である．

$n \geq m$ なら，$(a_n - a_m) + (b_m - b_n) \leq b_m - a_m = \frac{1}{2^m}(b - a)$ である．よって，実数のアルキメデス性より，(a_n) と (b_n) は，どちらもコーシー列である．したがって，実数の完備性より，(a_n) と (b_n) は収束する．任意の $n \geq 0$ に対し，$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b - a)$ だから，実数のアルキメデス性より，$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ である．$s = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ が A の上限であることを示す．

任意の n に対し，b_n は A の上界だから，$s = \lim_{n\to\infty} b_n$ も A の上界である．$r > 0$ を任意の実数とする．実数のアルキメデス性より，$r > \frac{1}{2^n}(b - a) = b_n - a_n$ をみたす n がある．$s - r < a_n \leq s$ である．a_n は A の上界ではないかまたは $a_n = a \in A$ だから，$s - r$ も A の上界でない．よって，s は A の上限である．

8.3.6 1. $f \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を，$0 \leq f(x) \leq 1, f(x) = 0$ $(0 \leq x \leq 1, 3 \leq x)$，$f(2) = 1$ をみたす連続関数とする．自然数 $n \geq 0$ に対し，連続関数 $f_n \in A$ を $f_n(x) = f(3^n x)$ で定める．$n \neq m$ なら，$\|f_n - f_m\|_\infty = 1$ だから，関数列 (f_n) は収束する部分列をもたない．よって，A は点列コンパクトでないから，コンパクトでない．

2. B は一様収束位相に関して，$C([0,1])$ の閉集合だから，完備距離空間である．B が全有界であることを示す．自然数 $n \geq 1$ に対し，$C_n = \{\frac{m}{n} \mid m = 0, 1, \dots, n\}$ とおき，

$$B_n = \left\{ f \in B \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ のグラフは有限個の線分の合併であり,} \\ \text{各線分の端点は } C_n \times C_n \text{ の点である} \end{array} \right\}$$

とおく．B_n は有限集合だから，任意の $f \in B$ に対し，$d(f, B_n) \leq \frac{1}{n}$ を示せばよい．$g \in B_n$ で，任意の $c \in C_n$ に対し，$|f(c) - g(c)| \leq \frac{1}{2n}$ をみたすものがある．$\|f - g\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ を示せばよい．

$x \in [0,1]$ とする．$x = \frac{k}{n} + \frac{t}{n}$ をみたす $0 \leq k \leq n-1, 0 \leq t \leq 1$ がある．$|f(x) - g(\frac{k}{n})| \leq |f(x) - f(\frac{k}{n})| + \frac{1}{2n} \leq \frac{t}{n} + \frac{1}{2n}$ である．同様に，$|f(x) - g(\frac{k+1}{n})| \leq \frac{1-t}{n} + \frac{1}{2n}$ である．よって，

$$|f(x) - g(x)| \leq (1-t)|f(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)| + t|f(x) - g\left(\frac{k+1}{n}\right)| \leq \frac{2(1-t)t}{n} + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n}$$

であり，$\|f - g\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ である．よって，定理 8.3.5 より，B はコンパクトである．

8.3.7 1.[AC] $g \in W$ とする．V の元の列 (f_n) と W の元の列 (g_n) を次のように帰納的に定める．$g_0 = g$ とおく．g_n まで定まったとき，f_n を $\|f_n\|_V \leq \|g_n\|_W$ かつ $\|g_n - F(f_n)\|_W \leq r\|g_n\|_W$ をみたす V の元とし，$g_{n+1} = g_n - F(f_n)$ とおく．$s_n = f_0 + \cdots + f_{n-1}$ とおくと，$F(s_n) = g_0 - g_n$ である．$\|f_n\|_V \leq \|g_n\|_W \leq r^n \|g\|_W$ だから，(s_n) は V のコーシー列である．$s = \lim_{n\to\infty} s_n$ とおくと，F は連続で $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ だから，$F(s) = \lim_{n\to\infty} F(s_n) = g$ である．$g \in W$ は任意だから，F は全射である．

2. 1. で，$\|f_n\|_V \leq (1-r)\|g_n\|_W$ とすると，$\|f_n\|_V \leq (1-r)\|g_n\|_W \leq (1-r)r^n\|g\|_W$ であり，$\|s\|_V \leq (1-r)\sum_{n=0}^\infty r^n \|g\|_W = \|g\|_W$ である．

8.3.8 1. (1)⇒(3): コンパクト空間 X の閉部分集合はコンパクトだから，離散ならば有限である．

(2)⇒(3)[AC]: 対偶を示す．A を X の離散無限閉部分集合とする．点列 (x_n) を単射 $\mathbb{N} \to A$ で定める．A は閉集合だから，A の点列が $a \in X$ に収束するならば $a \in A$ である．A は離散だから，A の点列 (x_n) が $a \in A$ に収束するならば，$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq a\}$ は有限集合である．

2.[AC] 対偶を示す．X が空でないとし，連続関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ の最大値が存在しないとする．問題 6.4.6 の解答と同様に，$f(X)$ は上に有界であるとしてよい．$s = \sup f(X)$ とおく．単調増加数列 (a_n) で，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n \in f(X)$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = s$ となるものをとる．X の点列 (x_n) で，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n = f(x_n)$ をみたすものをとり，$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおく．任意の実数 $r < s$ に対し，$A \cap f^{-1}((-\infty, r))$ はハウスドルフ空間の有限部分集合だから，問題 6.1.1.1. より，離散閉集合である．$X = \bigcup_{r<s} f^{-1}((-\infty, r))$ だから，A は離散閉部分集合である．

3. 対偶を示す．$x\colon \mathbb{N} \to X$ を単射とし，$A = x(\mathbb{N})$ が離散閉部分集合であるとする．ティーツェの拡張定理より，連続関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ で，任意の $n \geq 0$ に対し $f(x_n) = n$ をみたすものが存在する．f の最大値は存在しない．

4.[AC] 3. と定理 8.3.5 より，距離空間が (3) をみたせば全有界であり，(4) をみたせば

完備であることを示せばよい．それぞれの対偶を示す．X が全有界でないとすると，実数 $r>0$ と X の点列 (a_n) で，任意の $n\neq m$ に対し $d(a_n,a_m)>r$ をみたすものの存在が，帰納的に示される．$A=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ は無限離散閉集合である．X が完備でないとすると，X の完備化 Y の点 $b\in Y\setminus X$ がある．連続関数 $f\colon X\to\mathbb{R}$ を $f(x)=\frac{1}{d(x,b)}$ で定めると，f は上に有界でない．

5.[AC] (a_n) を A の点列とする．$S_n=a_n^{-1}((0,1])$ は可算だから，$S=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}S_n$ も可算である．$a\in[0,1]^S$ を $\mathbb{R}\setminus S$ に対しては 0 で定義される関数と同一視することで，$[0,1]^S\subset[0,1]^{\mathbb{R}}$ と考える．(a_n) は $[0,1]^S$ の点列であり，$[0,1]^S\subset A$ はコンパクトで，命題 8.4.6 より距離づけ可能だから，(a_n) の収束する部分列が存在する．

A は X で稠密だから，A はコンパクトでない．

6.[AC] $X=[0,1]^{\mathbb{R}}$ は，定理 6.4.8 より，コンパクトである．U はコンパクト空間 X の開部分空間だから，命題 6.6.3 より，局所コンパクトである．$f\colon U\to\mathbb{R}$ を連続関数とする．4. より A は点列コンパクトだから，$f(A)\subset\mathbb{R}$ も点列コンパクトである．よって，定理 8.3.5(2)⇒(1) より，$f(A)\subset\mathbb{R}$ はコンパクトであり，命題 6.5.3.1. より，閉集合である．A は U で稠密だから，$f(A)\subset f(U)\subset\overline{f(A)}=f(A)$ である．A は (4) をみたすから，U も (4) をみたす．(a_n) を，$0\leq a_n<1$ かつ $\lim_{n\to\infty}a_n=1$ をみたす単調増加数列とし，$B=\{$ 定数関数 $a_n \mid n\in\mathbb{N}\}\subset U$ とする．対角写像 $[0,1)\to U$ は閉うめこみだから，B は無限離散閉部分空間である．

7. 自然数 n に対し，$\mathrm{ev}_n\in[0,1]^{(2^{\mathbb{N}})}=\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(\mathbb{N},\{0,1\}),[0,1])$ を，値写像 $\mathrm{ev}_n\colon\mathrm{Map}(\mathbb{N},\{0,1\})\to\{0,1\}\subset[0,1]$ とする．$[0,1]^{(2^{\mathbb{N}})}$ の点列 (ev_n) は，収束する部分列をもたないことを示す．(m_n) を単調増加自然数列とする．$\{m_n \mid n$ は奇数 $\}\subset\mathbb{N}$ の特性関数を $f\in2^{\mathbb{N}}$ とすると，部分列 (ev_{m_n}) の f 成分への射影 $(f(m_n))$ は，$\{n \mid n$ は奇数 $\}\subset\mathbb{N}$ の特性関数である．これは収束しないから，点列 (ev_n) の収束する部分列は存在しない．

8.4.1 1. $\mathcal{U}$ を $\mathcal{O}$ の基底とする．写像 $F\colon\mathcal{O}\to P(\mathcal{U})$ を，開集合 U に対し $F(U)=\{V\in\mathcal{U}\mid V\subset U\}$ で定める．$\mathcal{U}$ が基底だから，$U=\bigcup_{V\in F(U)}V$ であり，F は単射である．$\mathcal{U}$ が可算なら，$\mathrm{Card}\ \mathcal{O}\leq\mathrm{Card}\ P(\mathcal{U})\leq\aleph$ である．

2. X がハウスドルフなら，$x\in X$ に対し，$X\setminus\{x\}\in\mathcal{O}$ である．写像 $G\colon X\to\mathcal{O}$ を，$G(x)=X\setminus\{x\}$ で定める．G は単射だから，$\mathrm{Card}\ X\leq\mathrm{Card}\ \mathcal{O}$ である．

8.4.2 1. A を X の部分空間とする．系 8.4.4 より，X は第 2 可算である．よって，A も第 2 可算である．したがって，系 8.4.4 より，A は可分である．

2. A を X の離散部分空間とする．1. より A は可分だから，可算である．

8.4.3 U の連結成分は，問題 6.2.7.2. より，$\mathbb{R}$ の連結開集合であり，命題 6.2.12 より，開区間である．商写像 $U\to\pi_0(U)$ の $U\cap\mathbb{Q}$ への制限は全射である．$\mathbb{Q}$ は可算だから，その部分集合 $U\cap\mathbb{Q}$ も可算であり，$\pi_0(U)$ も可算である．

8.4.4 1. $f\in A$ に対し，f のグラフの各線分の端点のなす有限集合を対応させる写像

$A \to F(\mathbb{Q}^2)$ は，単射である．$F(\mathbb{Q}^2)$ は可算だから，A も可算である．

2. $f \in C([0,1])$ とし，$r > 0$ を実数とする．問題 6.4.10 より，f は一様連続である．よって，自然数 $n \geq 1$ で，$|x-y| \leq \frac{1}{n}$ なら $|f(x)-f(y)| < r$ となるものが存在する．整数 $0 \leq k \leq n$ に対し，有理数 a_k を $|f(\frac{k}{n}) - a_k| < r - \max\{|f(x) - f(\frac{k}{n})| \mid |x - \frac{k}{n}| \leq \frac{1}{n}\}$ をみたすようにとり，$P_k = (\frac{k}{n}, a_k) \in \mathbb{Q}^2$ とおく．関数 $g \in A$ を，g のグラフが n 個の線分 $P_{k-1}P_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ の合併となるものとする．$\|f - g\|_\infty < r$ を示せばよい．

$x \in [0,1]$ に対し，$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$ となる $0 \leq k \leq n-1$ をとる．$|f(x) - g(\frac{k}{n})| \leq |f(x) - f(\frac{k}{n})| + |f(\frac{k}{n}) - a_k| < r$ である．同様に，$|f(x) - g(\frac{k+1}{n})| < r$ である．$g(x)$ は $g(\frac{k}{n})$ と $g(\frac{k+1}{n})$ の間にあるから，$|f(x) - g(x)| < r$ である．

8.4.5 1. $\widetilde{\mathbb{N}}$ を $\mathbb{N}$ の 1 点コンパクト化とすると，C は，$\mathbb{N}$ への制限が定める等長写像 $C(\widetilde{\mathbb{N}}) \to l^\infty$ の像である．系 8.3.8 より $C(\widetilde{\mathbb{N}})$ は完備だから，C は閉部分空間である．$C(\widetilde{\mathbb{N}})$ の部分集合 $\{f \in C(\widetilde{\mathbb{N}}) \mid f(\widetilde{\mathbb{N}}) \subset \mathbb{Q}$ かつ f は局所定数 $\}$ は稠密であり，可算である．

2. $a, b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ とする．$a \neq b$ なら $d_\infty(a,b) = 1$ だから，$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ は離散である．

3. 2. より，l^∞ は可算でない離散部分集合を含む．よって，問題 8.4.2.2. より，l^∞ は可分ではない．

4. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は距離づけ可能で可分だから，問題 8.4.2.1. より，その部分空間も可分である．3. より，l^∞ は可分ではないから，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の部分空間ではない．

8.4.6 1. U を X の開集合とし，$x \in U$ とする．x の開近傍 U' とコンパクト集合 A で，$U' \subset A$ をみたすものがある．$\mathcal{U}$ の元 V で，$x \in V \subset U \cap U' \subset A$ をみたすものがある．$\overline{V} \subset A$ はコンパクトだから，$V \in \mathcal{U}'$ である．よって，$\mathcal{U}'$ は X の開集合系の基底である．

2. (1)⇒(2): $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X のコンパクト集合の列で，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ をみたすものとする．コンパクト空間 Y は系 6.5.6 より正規だから，b の開近傍 U_n と A_n の開近傍 V_n で，$U_n \cap V_n = \emptyset$ をみたすものが存在する．A を X のコンパクト集合とすると，$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ だから，$A \subset V_0 \cup \cdots \cup V_n$ をみたす自然数 n が存在する．$Y \setminus A \supset U_0 \cap \cdots \cap U_n$ だから，$(U_0 \cap \cdots \cap U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は b の開近傍の基本系である．

(2)⇒(1): $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が，b の開近傍の基本系ならば，$A_n = Y \setminus U_n$ は X のコンパクト集合であり，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = Y \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = Y \setminus \{b\} = X$ である．

3. (1)⇒(5): $\mathcal{U}$ を X の開集合系の可算基底とし，$\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ を 1. のように定める．$\mathcal{U}'$ も可算であり，$X = \bigcup_{U\in\mathcal{U}'} U$ だから，X は σ コンパクトである．よって，2 より，b の開近傍の基本系 $\mathcal{U}_b$ で可算集合であるものが存在する．$\mathcal{U}_Y = \mathcal{U} \cup \mathcal{U}_b$ は Y の開集合系の基底であり，可算である．

(5)⇒(3)$^{\mathrm{AC}}$: Y が第 2 可算なら，系 8.4.9 より距離づけ可能であり，X も距離づけ可能である．Y は第 1 可算だから，2. より，X は σ コンパクトである．

(3)⇒(2)$^{\mathrm{AC}}$: X はコンパクト集合の列 (A_n) の合併である．A_n は距離づけ可能なコンパクト空間だから可分である．よって X も可分である．

(2)⇒(1): 系 8.4.4 よりしたがう．

(5)⇒(4): Y が第 2 可算なら X も第 2 可算である．命題 8.4.2.2. より，Y は第 1 可算だから，2. より，X は σ コンパクトである．

(4)⇒(1): $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X のコンパクト集合の列で，$X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ をみたすものとする．$n\in\mathbb{N}$ に対し，X の第 2 可算な開集合の有限族 $V_{1n},\ldots,V_{m_nn}$ で，$A_n\subset V_{1n}\cup\cdots\cup V_{m_nn}$ をみたすものが存在する．$(V_{in})_{n\in\mathbb{N},i=1,\ldots,m_n}$ は X の可算開被覆であり，X は第 2 可算である．

8.4.7 $I=\mathbb{N}$としてよい．各$n\in\mathbb{N}$に対し，d_n を X_n の距離で，X_n の位相を定めるものとする．$d_n(x,y)$ を $\max(\frac{1}{2^n},d_n(x,y))$ でおきかえて，$x,y\in X_n$ なら，$d_n(x,y)\leq\frac{1}{2^n}$ としてよい．$x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}},y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，$d(x,y)=\sup_{n\in\mathbb{N}}(d_n(x_n,y_n))$ と定義する．d が距離であることを示す．$d(x,y)=0$ ならば，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $d_n(x_n,y_n)=0$ であり，$x=y$ である．$d(x,y)=d(y,x)$ である．$d(x,z)=\sup_{n\in\mathbb{N}}(d_n(x_n,z_n))\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}(d_n(x_n,y_n)+d_n(y_n,z_n))\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}(d_n(x_n,y_n))+\sup_{n\in\mathbb{N}}(d_n(y_n,z_n))\leq d(x,y)+d(y,z)$ である．

d が定める位相は積位相であることを示す．$x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とし，$r>0$ を実数とする．$U_r(x)=\prod_{2^n\leq\frac{1}{r}}U_r(x_n)\times\prod_{2^n\geq\frac{1}{r}}X_n$ である．よって，d が定める位相は積位相である．

8.4.8 1. $\mathcal{U}$ を X の可算基底とする．$\widetilde{\mathcal{U}}=\{\dot{\bigcup}_{U\in S}U\mid S$ は$\mathcal{U}$ の有限部分集合 $\}$ も X の可算基底である．A が X のコンパクト部分集合で，W が A の開近傍ならば，$A\subset U\subset W$ をみたす $U\in\widetilde{\mathcal{U}}$ が存在する．f は命題 6.5.1.1. より閉写像だから，X の開集合 U に対し $f_!(U)=Y\setminus f(X\setminus U)$ は Y の開集合である．$\mathcal{V}=\{f_!(U)\mid U\in\widetilde{\mathcal{U}}\}$ も可算集合である．

$\mathcal{V}$ が Y の基底であることを示す．V を Y の開集合とし，$y\in V$ とする．$\{y\}$ は Y の閉集合だから，$f^{-1}(y)$ はコンパクト空間 X の閉集合であり，系 6.4.2.1. より，コンパクトである．$f^{-1}(V)$ は，コンパクト集合 $f^{-1}(y)$ の開近傍だから，$f^{-1}(y)\subset U\subset f^{-1}(V)$ をみたす $U\in\widetilde{\mathcal{U}}$ が存在する．このとき，$y\in f_!(U)\subset V$ だから，$\mathcal{V}$ は Y の基底である．

2. (1)⇒(2)$^{\mathrm{AC}}$: 記号を定理 8.3.5(3)⇒(1)$^{\mathrm{AC}}$ の証明のとおりとする．連続全射 $l\colon C\to X$ があるから，連続全射 $2^{\mathbb{N}}\to C$ を定義すればよい．C_n を射影 $A\to\prod_{k=0}^{n-1}A_k$ による C の像とし，$p_n\colon C_{n+1}\to C_n$ を射影 $\prod_{k=0}^{n}A_k\to\prod_{k=0}^{n-1}A_k$ の制限，$\tilde{p}_n\colon C\to C_n$ を射影 $A\to\prod_{k=0}^{n-1}A_k$ の制限とする．自然数の増大列 (m_n) と，全射 $f_n\colon 2^{m_n}\to C_n$ の列 (f_n) で，次の条件をみたすものが帰納的に定義できる：$m_0=0$ であり，任意の自然数 $n\geq 0$ に対し，$q_n\colon 2^{m_{n+1}}\to 2^{m_n}$ を射影とすると，$f_n\circ q_n=p_n\circ f_{n+1}$ である．

$\tilde{q}_n\colon 2^{\mathbb{N}}\to 2^{m_n}$ を射影とすると，写像 $f\colon 2^{\mathbb{N}}\to C$ で，任意の自然数 n に対し，$f_n\circ\tilde{q}_n=\tilde{p}_n\circ f$ をみたすものがただ 1 つ存在する．この f は連続全射である．

(2)⇒(1)$^{\mathrm{AC}}$: $2^{\mathbb{N}}$ はコンパクトだから，連続全射 $2^{\mathbb{N}}\to X$ が存在すれば，X もコンパクトである．$2^{\mathbb{N}}$ は第 2 可算だから，1. より，X も第 2 可算である．よって，系 8.4.9(2)⇒(1) より，X は距離づけ可能である．

8.4.9 1. $b\in\mathbb{R}$ に対し，合成 $f_b=f\circ j_b\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は，$f_b(x,y)=(x,xy+b)$ で定ま

る．f_b は連続だから，f は連続である．

2. $V = f^{-1}((\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R})$ とおく．$U_b = V \cup f^{-1}((0,b))$ だから，$(U_b)_{b\in\mathbb{R}}$ は X の被覆であり，$b \neq b'$ ならば，$U_b \cap U_{b'} = V$ である．f_b は，開部分空間の同相写像 $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R} \to (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$ をひきおこすから，問題 5.4.10 のはりあわせの条件がみたされ，$j_b\colon \mathbb{R}^2 \to X$ は開うめこみであり，$(U_b)_{b\in\mathbb{R}}$ は X の開被覆である．

3. $A \subset V = \{(x,y,1) \mid x,y\in\mathbb{R}, x\neq 0\}$ は稠密であり，任意の $b\in\mathbb{R}$ に対し，$V\subset U_b$ は稠密である．

4. 任意の $b\in\mathbb{R}$ に対し，$B\cap U_b = \{(0,b,0)\}$ である．

5. U_b はハウスドルフだから，$x,x'\in U_b$ をみたす $b\in\mathbb{R}$ が存在すれば，開近傍 $x\in U, x'\in U'\subset U_b$ で，$U\cap U' = \emptyset$ をみたすものがある．$x,x'\in U_b$ をみたす $b\in\mathbb{R}$ が存在しなければ，$f(x) = (0,b), f(x') = (0,b')$ をみたす $b,b'\in\mathbb{R}, b\neq b'$ がある．開近傍 $f(x)\in U, f(x')\in U'\subset\mathbb{R}^2$ で，$U\cap U' = \emptyset$ をみたすものをとれば，$x\in f^{-1}(U), x'\in f^{-1}(U')$ は開近傍であり，$f^{-1}(U)\cap f^{-1}(U') = \emptyset$ である．

6. 任意の $b\in\mathbb{R}$ に対し，U_b は第 1 可算である．

7. $\mathcal{U}$ を X の開集合系の基底とする．任意の $b\in\mathbb{R}$ に対し，$\mathcal{U}$ の元 V_b で，$(0,b,0)\in V_b\subset U_b$ をみたすものがある．$b\neq b'$ なら $V_b\neq V_{b'}$ だから，$\mathcal{U}$ は可算でない．

8. 5. より，X はハウスドルフである．任意の $b\in\mathbb{R}$ に対し，U_b は局所コンパクトである．

9. (A_n) をコンパクト集合の列とすると，$A_n\cap B$ は有限集合だから，$B\not\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ である．

10. 3. より，X は可分である．X が距離づけ可能ならば，系 8.4.4 より，X は第 2 可算となる．これは 7. に反する．

8.4.10 1. 制限写像 $B(X)\to B(A)$ が，問題 8.3.7 の条件をみたすことを示す．$g\in B(A)$ とし，$M = \|g\|_\infty$ とおく．$M = 0$ なら $f = 0$ とすればよい．$M > 0$ とする．$0 < r < 1$ とし，$A_+ = \{x\in A \mid g(x)\geq rM\}$, $A_- = \{x\in A \mid g(x)\leq -rM\}$ とおく．ウリゾンの補題より，連続関数 $f\colon X\to[-rM, rM]$ で，$A_+\subset f^{-1}(rM), A_-\subset f^{-1}(-rM)$ をみたすものがある．$\|f\| = r\|g\|$ であり，$\|g - f|_A\| \leq \max((1-r)M, 2rM) = \max(1-r, 2r)\|g\|$ である．よって，$r\leq\frac{1}{3}$ とすれば，問題 8.3.7.1. より，制限写像 $B(X)\to B(A)$ は全射であり，問題 8.3.7.2. より，任意の $g\in B(A)$ に対し，$f|_A = g$ かつ $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$ をみたす $f\in B(X)$ が存在する．

2. $h\colon\mathbb{R}\to(-1,1)$ を同相写像とする．$g\in C(A)$ とすると，1. より，$h\circ g = f|_A$ をみたす連続関数 $f\colon X\to[-1,1]$ が存在する．$B = f^{-1}(\{1,-1\})$ とすると，$A\cap B = \emptyset$ だから，ウリゾンの補題より，連続関数 $e\colon X\to[0,1]$ で，$A\subset e^{-1}(1)$, $B\subset e^{-1}(0)$ をみたすものが存在する．積 ef は連続関数 $X\to(-1,1)$ であり，$(h^{-1}\circ ef)|_A = g$ である．

8.4.11 (1)⇒(2): 問題 8.4.8.2. より，連続全射 $f\colon 2^{\mathbb{N}}\to X$ が存在する．$f^*\colon B(X)\to$

$B(2^{\mathbb{N}})$ は等長写像だから，問題 8.4.2.1. より，$X = 2^{\mathbb{N}}$ の場合に示せばよい．連続関数 $2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ は一様連続だから，$A = \{f \in C(2^{\mathbb{N}}) \mid f(2^{\mathbb{N}}) \subset \mathbb{Q}$ かつ f は局所定数 $\}$ は稠密である．A は可算だから，$C(2^{\mathbb{N}})$ は可分である．

(2)⇒(1): $B(X)$ が可分なら，問題 8.4.2.1. より，$C(X, [0,1]) \subset B(X)$ も可分である．$A \subset C(X, [0,1])$ を稠密な可算部分集合とする．U を $x \in X$ の開近傍とすると，ウリゾンの補題より，連続関数 $f \in C(X, [0,1])$ で，$f(x) = 0$，$f^{-1}([0,1)) \subset U$ をみたすものがある．$g \in A$ を $\|f - g\|_\infty \leq \frac{1}{3}$ をみたす連続関数とすれば，$x \in g^{-1}([0, \frac{1}{2})) \subset f^{-1}([0,1)) \subset U$ である．したがって $\{g^{-1}([0, \frac{1}{2})) \mid g \in A\}$ は X の可算基底であり，X は第 2 可算である．ウリゾンの距離づけ定理より，X は距離づけ可能である．

A を X の離散閉部分集合とする．問題 8.4.10 より，制限写像 $B(X) \to B(A)$ は連続全射である．よって，$B(X)$ が可分なら $B(A)$ も可分である．問題 8.4.5.2. と同様に，$2^A \subset B(A)$ は離散である．問題 8.4.2.2. より，2^A は可算である．よって，A は有限である．したがって，問題 8.3.8.4. より，X はコンパクトである．

参考書

この本で扱ったような集合と位相の内容について，

[1] 松坂和夫，集合・位相入門，岩波書店 (1968)
[2] 内田伏一，集合と位相，裳華房 (1986)

上の 2 冊は，この本を書くときに参考にした．

公理的集合論や形式論理については，

[3] 田中一之・鈴木登志雄，数学のロジックと集合論，培風館 (2003)

集合と位相に関する内容のうち，次にあげるような項目はあえて扱わなかった．

- 公理的集合論と述語論理
- 整列集合と超限帰納法，濃度の演算
- 閉包作用素や近傍系などによる位相の定義，およびそれらの，開集合系による定義との同値性
- フィルターや有向集合に関する，極限
- ハウスドルフ性と正規性以外の，分離公理
- パラコンパクト性と 1 の分解
- 写像の族の同程度連続性と近似定理
- 圏と関手，順極限と逆極限

これらについては，必要に応じ，上にあげた文献などで補ってほしい．

無限次元線形空間の基底の存在を含む，線形代数の進んだ内容については，

[4] 斎藤 毅，線形代数の世界 抽象数学の入り口 大学数学の入門 7，東京大学出版会 (2007)

複素関数論については，

[5] L. V. アールフォルス，笠原乾吉 訳，複素解析，現代数学社 (1982)

ひきつづき，数学の各分野を学ぶには，

[6] 桂 利行，代数学 I 群と環 大学数学への入門 1，東京大学出版会 (2004)
[7] 坪井 俊，幾何学 I 多様体入門 大学数学への入門 4，東京大学出版会 (2005)
[8] 吉田伸生，ルベーグ積分入門 使うための理論と演習，遊星社 (2006)

記号一覧

索引

サ　行

ハ　行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

ワ　行

人名表

著者略歴

斎藤 毅（さいとう・たけし）

1961年　生まれる.
1987年　東京大学大学院理学系研究科博士課程中退.
現　在　東京大学大学院数理科学研究科教授.
　　　　理学博士.
主要著書『線形代数の世界　抽象数学の入り口』
　　　　（東京大学出版会，2007），
　　　　『フェルマー予想』（岩波書店，2009）.

集合と位相　　大学数学の入門⑧

2009 年 9 月 24 日　初　版

[検印廃止]

著　者　斎藤 毅
発行所　財団法人 東京大学出版会
　　　　代表者 長谷川寿一
　　　　113-8654 東京都文京区本郷 7-3-1 東大構内
　　　　電話 03-3811-8814　　Fax 03-3812-6958
　　　　振替 00160-6-59964
印刷所　三美印刷株式会社
製本所　有限会社永澤製本所

ISBN 978-4-13-062958-4 Printed in Japan